Εξέταση στα «Μαθηματική Προτυποποίηση», Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών 22 Σεπτεμβρίου 2016, Διάρκεια: 2.5h

Διδάσκων: Ι. Καραφύλλης

Θέμα 1ο: (α) Να ελαχιστοποιήσετε το συναρτησιακό $J(y)=\int_0^1\left(y^2(t)-y(t)\dot{y}(t)+\dot{y}^2(t)\right)dt$ με περιορισμούς $y(0)=0$, $y(1)=1$. **(β)** Να ελαχιστοποιήσετε το συναρτησιακό $J(y)=\int_0^1\left(y^2(t)-y(t)\dot{y}(t)+\dot{y}^2(t)\right)dt$ με περιορισμούς $y(0)=0$, $y(1)=1$ και $\int_0^1 y(t)dt=2$.

Θέμα 2ο: (α) Ασυμπίεστο ρευστό ρέει στην περιοχή $D\subseteq\Re^2$. Ένας φίλος σας ερευνητής προτείνει ότι η ταχύτητα ροής του ρευστού μπορεί να δίνεται από τις εξισώσεις $u(t,x,y)=\frac{\partial\psi}{\partial y}(t,x,y)$ και $v(t,x,y)=-\frac{\partial\psi}{\partial x}(t,x,y)$ για κάθε $t\geq 0$, $(x,y)\in D$, όπου $\psi:[0,+\infty)\times D\to\Re$ δοσμένη παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι με την υπόδειξη του φίλου σας ικανοποιείται αυτομάτως η εξίσωση της συνέχειας αν η συνάρτηση $\psi:[0,+\infty)\times D\to\Re$ είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. **(β)** Να δώσετε το μοντέλο Lotka-Volterra για ένα κλειστό οικοσύστημα με τρεις πληθυσμούς, στο οποίο ισχύει η ακόλουθη τροφική αλυσίδα: το είδος 1 τρέφεται αποκλειστικά από το είδος 3, το είδος 2 τρέφεται αποκλειστικά από το είδος 3 και το είδος 3 τρέφεται αποκλειστικά από το είδος 1.

Θέμα 3ο: Έστω η διαφορική εξίσωση $\ddot{y}(t)+\left(1+\varepsilon^2\right)y(t)+\varepsilon\, y^5(t)=0$, όπου $\varepsilon>0$ είναι μία σταθερά με $\varepsilon<<1$. (α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $H(t)=\frac{1}{2}\dot{y}^2(t)+\frac{1+\varepsilon^2}{2}y^2(t)+\frac{\varepsilon}{6}y^6(t)$ είναι σταθερή (αναλλοίωτη). (β) Να δώσετε τη προσέγγιση 1ης τάξεως της λύσης με αρχική συνθήκη $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=0$ με τη μέθοδο Poincare-Lindstedt (χρησιμοποιήστε τον τύπο $\cos^5(x)=\frac{1}{16}\cos(5x)+\frac{5}{16}\cos(3x)+\frac{5}{8}\cos(x)$).

Θέμα 4ο: Έστω ότι η θερμοκρασία $T(t,z)$ σε μία ράβδο μήκους $L=1m$ υπακούει στην εξίσωση της θερμότητας $\frac{\partial T}{\partial t}(t,z)=a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(t,z)$ για $t>0, z\in(0,1)$, όπου t ο χρόνος, $z\in[0,1]$ η χωρική συντεταγμένη και $a>0$ σταθερά. Αν στα άκρα της ράβδου η θερμοκρασία είναι σταθερή και ίση με 0, να δείξετε ότι: (α) $\frac{d}{dt}\int_0^1 T^2(t,z)dz=-2a\int_0^1\left(\frac{\partial T}{\partial z}(t,z)\right)^2dz$ για $t>0$. (β) Να δείξετε ότι αν $T(0,z)=T_0(z)$ για $z\in[0,1]$, όπου $T_0:[0,1]\to\Re$ συνεχής συνάρτηση, τότε $\int_0^1 T^2(t,z)dz\leq\int_0^1 T_0^2(z)dz$ για $t\geq 0$.

Καλή επιτυχία!