ΑΣΚ. 1 ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΗ
ΑΣΚ. 2,3,4 ΔΙΑΛΕΓΟΥΜΕ 2
ΘΕΜΑ 5,6 ΔΙΑΛΕΓΟΥΜΕ 1

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1-7-2016

Άσκηση 1. *Δίνεται η κυλινδρική έλικα* $C: r(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t)\ t \in \mathbf{R}$.

(a) *Υπολογίστε την στρέψη* $\tau(t)$ *της* C. *Σχεδιάστε την καμπύλη για* $t \in [0, 2\pi]$.

(b) *Βρείτε το σημείο τομής* $K(t) = (\alpha(t),\ \beta(t), \gamma(t))$ *της εφαπτόμενης ευθείας της* C *στο σημείο* $r(t)$ *με το επίπεδο* $z = 0$.

(c) *Έστω* $W: \rho(t) = (\alpha(t),\ \beta(t), \gamma(t))$ *η καμπύλη που δημιουργούν τα σημεία* $K(t)$ *επάνω στο επίπεδο* $z = 0$, *και έστω* $\ell_{t_1}^{t_2}(C)$, $\ell_{t_1}^{t_2}(W)$ *τα μήκη των τόξων των* C, W *για* $t \in [t_1,\ t_2]$. *Για ποιες τιμές του* t *είναι* $\ell_0^t(C) = \ell_0^t(W)$;

Άσκηση 2. *Έστω η επιφάνεια* $S: r(u, v) = (u,\ v,\ u^2 + v^2)$, $u^2 + v^2 < 9$, *έστω* C *η τομή της επιφάνειας με το επίπεδο* $z = 4$, W *η παραμετρική καμπύλη* $v = -2$ *της επιφάνειας και έστω το σημείο* $P = (0, -2, 0)$ *της* S.

(i) *Σχεδιάστε την επιφάνεια, τις καμπύλες* C, W *και δείξτε ότι οι καμπύλες* C, W *εφάπτονται στο σημείο* P.

(ii) *Αν* γ *είναι καμπύλη της επιφάνειας που εφάπτεται της* C *στο σημείο* P, *προσδιορίστε τη κάθετη καμπυλότητα της* γ *στο σημείο* P.

Άσκηση 3. *Έστω η επιφάνεια του κώνου*

$$r(\theta, t) = (cos\theta, sin\theta, 2t),\ \theta \in [0,\ 2\pi],\ t > 0$$

και έστω οι καμπύλες $t = 1$, $\theta = \pi$ *και* $t = 2\theta$ *της επιφάνειας. Προσδιορίστε τη γεωδαισιακή διαφορική εξίσωση της επιφάνειας και εξετάστε αν οι παραπάνω καμπύλες είναι γεωδαισιακές της* S.

Άσκηση 4. *Έστω η επιφάνεια* $S: r(u, v) = (u + v, 2u + v, uv)$, $u, v > 0$. *Προσδιορίστε την εξίσωση της κάθετης τομής* c *της επιφάνειας στο σημείο* $r(2, 1)$ *με διεύθυνση* $(2, 1)$. *Ποια είναι η κάθετη καμπυλότητα της* c *στο* $r(2, 1)$;

Θέμα 5. *Έστω η στοιχειώδης επιφάνεια* $S: r(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, *κλάσης 2 και έστω η καμπύλη* $c: \phi(s) = r(u(s), v(s))$, $s \in I$, *όπου* s *φυσική παράμετρος της επιφάνειας και έστω* P *σημείο της* S.

(i) *Δώστε τον ορισμό του διανύσματος γεωδαισιακής καμπυλότητας και του διανύσματος κάθετης καμμπυλότητας της καμπύλης* c *και αρχίζοντας από αυτούς τους ορισμούς δείξτε ότι σε κάθε σημείο της* c *το διάνυσμα γεωδαισιακής καμπυλότητας και το διάνυσμα καμπυλότητας της καμπύλης* c *είναι κάθετα.*

(ii) *Έστω ότι η καμπύλη* c *διέρχεται από το* P *και ότι* $P = \phi(s)$. *Αρχίζοντας απο το τύπο της κάθετης καμπυλότητας*

$$\kappa_n = L(u'(s))^2 + 2Mu(s)v(s) + N(u'(s))^2$$

της καμπύλης c *στο* P, *όπου* L, M, N *είναι τα θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τάξης της* S *στο* P, *αν* $LN - M^2 > 0$, *δείξτε ότι κάθε καμπύλη της επιφάνειας που διέρχεται από το σημείο* P *έχει διάνυσμα κάθετης καμπυλότητας παράλληλο και ομόρροπο του καθέτου διανύσματος* $\mathbf{N}$ *της* S *(και το σημείο* P *ονομάζεται ελλειπτικό).*

Θέμα 6. *Έστω η στοιχειώδης επιφάνεια* $S : r(u,v)$, $(u,v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, *κλάσης 2 και έστω η καμπύλη* $c : \phi(s) = r(u(s), v(s))$, $s \in I$, *όπου* s *φυσική παράμετρος.*

(i) Αρχίζοντας από τον ορισμό της γεωδαισιακής (η c *είναι γεωδαισιακή αν σε κάθε σημείο της* c *το διάνυσμα γεωδαισιακής καμπυλότητας της* c *ισούται με το μηδέν) δείξτε ότι η* c *είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν, σε κάθε σημείο της* c*, το διάνυσμα καμπυλότητας της* c *είναι κάθετο στην επιφάνεια. Τι ισχύει από αυτή την ισοδυναμία αν η* s *είναι τυχαία παράμετρος; (δικαιολογήστε την απάντησή σας).*

(ii) Διατυπώστε το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας γεωδαισιακών καμπύλων.