ΣΕΜΦΕ, Ε.Μ.Π
ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ
25/9/2015

ΘΕΜΑ 1.

(i) (1 μ). Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης να υπολογίσετε το «επαναλαμβανόμενο» ολοκλήρωμα

$$\int_0^{64} \left(\int_{\frac{1}{2}y^{\frac{1}{3}}}^{2} y \cos(x^7)\, dx \right) dy.$$

(ii) (1,5 μ). Να υπολογίσετε το τριπλό ολοκλήρωμα $\int\int\int_G x\, dx\, dy\, dz$, όπου G είναι το στερεό στο πρώτο ογδοημόριο του $\mathbb{R}^3$ το οποίο φράσσεται από τις επιφάνειες με εξισώσεις$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ και $2x + 2y + z = 2$.

(iii) (1,5 μ). Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

εφ. Green.

$$\oint_c \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}; = \oint \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = 2\pi$$

όπου c η περίμετρος του τετραγώνου $D = \{(x, y) : |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\}$.

ΘΕΜΑ 2. (2,5 μ). Να επαληθεύσετε το θεώρημα Green για τη συνάρτηση $\vec{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\vec{F}(x, y) = (y^2, x^2)$ και το χωρίο D του $\mathbb{R}^2$ που φράσσεται από τις καμπύλες $y = 2x^2$ και $y = 2$.

ΘΕΜΑ 3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\vec{F}(x, y, z) = (x, -2y, z)$.

(i) (0,5 μ). Δείξτε ότι υπάρχει C^1-ταξης συνάρτηση $\vec{G}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$.

(ii) (1.5 μ). Βρείτε μία συνάρτηση $\vec{G}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ικανοποιεί το (i).

Stokes χρησιμοποιώ την Green βάλνω στο (ii)

(iii (1.5 μ). Αν S είναι το τμήμα της επιφάνειας $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ για το οποίο $z \geq \sqrt{5}$, υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int\int_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z)\, d\sigma$$

όπου $\vec{n}(x, y, z)$ είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα της S στο σημείο (x, y, z).

Διάρκεια εξετασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Stokes $\iint_S (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \vec{n} = \int \vec{F}\, d\sigma$