A

ΣΕΜΦΕ 3ο Εξάμηνο κανονική εξέταση - Μάρτιος 2014 (19-3-14)

Ανάλυση ΙΙΙ

Ονοματεπώνυμο .....

ΘΕΜΑΤΑ

Θ 1. α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\iint_D e^{x^3}\,dxdy,$$

όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y} \le x \le 3,\ 0 \le y \le 9\}$. **(1μ)**

β) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint \frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}\,dx + \frac{-x}{x^2+(y-1)^2}\,dy$$

όπου C είναι η θετικά προσανατολισμένη καμπύλη με εξίσωση $9x^2+16y^2=144$ **(1.5μ)**

Θ 2. Δίνεται το χωρίο G του $\mathbb{R}^3$, το οποίο ορίζεται από τις επιφάνειες $z = x^2+y^2$ και $8 - z = x^2+y^2$.

i) Να υπολογίσετε τον όγκο του χωρίου G. **(1.5μ)**

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τμήματος της επιφανείας του G που βρίσκεται πάνω από το επίπεδο $z = 4$. **(1μ)**

Θ 3. α) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (x,\ x,\ -z)$ του $\mathbb{R}^3$.

i) Να δείξετε ότι είναι σωληνοειδές. **(0.5μ)**

ii) Να βρείτε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G}$ του $\mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $\mathbf{F} = \mathrm{rot}\mathbf{G}$. **(1μ)**

iii) Εφαρμόζοντας κατάλληλα το θεώρημα του Stokes να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \mathbf{F}d\mathbf{s}$, όπου $\mathbf{S}$ η εσωτερική επιφάνεια του κώνου $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$. **(1μ)**

Το κάθετο με δείκτη το εσωτερικό

Θ 4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2},\ y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2},\ z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right)$$

και το χωρίο Ω του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από τις επιφάνειες $x^2+z^2=1$, $y=1$ και $y=2$. Αν S είναι το σύνορο του Ω, υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,d\sigma$, όπου $\vec{n}$ είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα της S. **(2.5μ)**

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ