ΣΕΜΦΕ 2ο Εξάμηνο
Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

Ονοματεπώνυμο .....

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ – Β

23 Ιουνίου 2016

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες και 45'.

Θέμα 1. (i) Έστω $V = C^\infty([0,1])$, ο διανυσματικός χώρος των απείρως διαφορίσιμων πραγματικών συναρτήσεων στο διάστημα $[0,1]$. Να χαρακτηρίσετε (χωρίς εξήγηση) τις παρακάτω απεικονίσεις ως: α) γραμμικές, β) τετραγωνικές, γ) διγραμμικές ή δ) τίποτα από τα παραπάνω. Για τις διγραμμικές, να γράψετε "συμμετρική διγραμμική" αν είναι συμμετρική, και "εσωτερικό γινόμενο" αν είναι εσωτερικό γινόμενο.

α') $F : V \to \mathbb{R}$, $F(f) = 2 + \int_0^1 f(x)dx$.
β') $F : V \times V \to \mathbb{R}$, $F(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.
γ') $F : V \times V \to \mathbb{R}$, $F(f,g) = \int_0^1 f''(x)g''(x)dx$.
δ') $F : V \to V$, $F(f) = 3\frac{d}{dx}f + 2f$.
ε') $F : V \to V$, $F(f) = f + (f')^2$.

(1,5μ)

(ii) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο $\langle\, , \rangle$. Αν ο γραμμικός τελεστής $T : V \to V$ είναι αυτοσυζυγής ως προς αυτό το εσωτερικό γινόμενο, και ο $W \subset V$ είναι ένας T-αναλλοίωτος υπόχωρος, να αποδείξετε ότι και ο $W^\perp$ είναι T-αναλλοίωτος. (1μ)

Θέμα 2. (i) Έστω $V = \mathbb{R}^2$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, και $T : V \to V$ ο τελεστής της περιστροφής κατά $60°$ στη φορά του ρολογιού.

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $f(v) = \langle v, Tv\rangle$, με αντίστοιχη συμμετρική διγραμμική μορφή F.

Να βρείτε τους πίνακες του T και της F ως προς τη συνήθη βάση, και μία ορθοκανονική βάση ως προς την οποία ο πίνακας της F είναι διαγώνιος. (1,5μ)

(ii) Έστω $V = \mathbb{R}^3$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Δίνεται η γραμμική μορφή $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = 2x+y-2z$, και έστω f η τετραγωνική μορφή T^2. Να βρείτε μία ορθοκανονική βάση ως προς την οποία η f αναπαρίσταται από διαγώνιο πίνακα. (1μ)

Θέμα 3. Έστω ο πίνακας $A(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha+8 & 8 & -\alpha-17 \\ -\alpha+18 & 18 & \alpha-37 \\ 9 & 9 & -19 \end{bmatrix}$ με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Βρείτε για ποιες τιμές του α ο πίνακας $A(\alpha)$ είναι διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας και για ποιες όχι. (1μ)
(ii) Κατασκευάστε πίνακα X τέτοιον ώστε να ισχύει $X^3 = A(27)$. (1μ)
(iii) Για τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο πίνακας $A(\alpha)$ δεν είναι διαγωνοποιήσιμος με μετασχηματισμό ομοιότητας, κατασκευάστε πλήρως την κανονική μορφή Jordan του $A(\alpha)$ και τον αντίστοιχο πίνακα ομοιότητας. (1μ)

Θέμα 4. (i) Έστω ένα μη μηδενικό διάνυσμα (στήλη) u διάστασης ν και ο $\nu \times \nu$ πίνακας $P = I_\nu - \frac{2}{u^*u}\, u u^*$. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας P είναι ερμιτιανός και ορθομοναδιαίος. Στη συνέχεια, να βρείτε τις ιδιοτιμές και τους ιδιόχωρους του πίνακα P. (1μ)
(ii) Έστω ένας $\nu \times \nu$ πίνακας A. Αν κάθε μη μηδενικό διάνυσμα (στήλη) διάστασης ν είναι ιδιοδιάνυσμα του A, να αποδείξετε ότι ο πίνακας A είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του I_ν. (1μ)