Κανονική 2013

Θέμα 1

a) Έχουμε την εξίσωση: $yz_x - xz_y - 2xyz = 0$ (1)
και την αρχική καμπύλη C: $x=t,\ y=t,\ t>0$ και ψάχνουμε την λύση $z=z(x,y)$ της (1) η οποία πάνω στην αρχική καμπύλη θα έχει τις τιμές $z=t^2$.

Οι αρχικές συνθήκες μας δίνουν την καμπύλη C και την τιμή της λύσης πάνω σε αυτή σε παραμετρική μορφή: $C: x=t, y=t, z=t^2$
$t>0$.

Γεωμετρικά, μας ζητείται να βρούμε μια επιφάνεια λύσεων $z=z(x,y)$ για την εξίσωση που θα περιέχει την καμπύλη C

Για την αρχική εξίσωση έχουμε: $\underset{\sim}{V}=(P,Q,R)=(y,-x,-2xyz)$
και πάνω στην καμπύλη C ισχύει:

$$P\frac{dy}{dt} - Q\frac{dx}{dt} = t\cdot 1-(-t)\cdot 1 = t+t = 2t,$$ όπου για $t>0$, είναι $2t\neq 0$.

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας, το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση σε όλο το $\underline{0}$. Λύνουμε ως εξής:

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{-2xyz}:$$

- $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x} \Rightarrow x\,dx=-y\,dy \Rightarrow$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}=\frac{-y^2}{2}+c_1 \Rightarrow \boxed{c_1=u_1=\frac{x^2+y^2}{2}}$$

- $\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{-2xyz} \Rightarrow dy=\frac{dz}{2yz} \Rightarrow 2y\,dy=\frac{dz}{z} \Rightarrow y^2=\ln z+\ln c_2^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow zC_2^{-1} = e^{y^2} \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{z}{e^{y^2}} = u_2}$$

Τα δύο αυτά πρώτα ολοκληρώματα είναι προφανώς συναρτησιακά ανεξάρτητα και ορισμένα σε όλο το $\mathbb{R}$, δηλαδή $\nabla u_1 \times \nabla u_2 \neq 0$ (σχεδόν) σε όλο το $\mathbb{R}$.

Εκφράζουμε τα u_1, u_2 στην μορφή: $U_1 = \frac{t^2+t^2}{2} = t^2$

$$U_2 = \frac{t^2}{e^{t^2}}$$

και απαλείφουμε την παράμετρο: $U_2 = \frac{U_1}{e^{U_1}}$.

Αντικαθιστούμε όπου $U_1 = u_1$ και όπου $U_2 = u_2$:

$$u_2 = \frac{u_1}{e^{u_1}} \Rightarrow \frac{z}{e^{y^2}} = \frac{(x^2+y^2)/2}{e^{(x^2+y^2)/2}} \Rightarrow z = \frac{x^2+y^2}{2e^{x^2/2}} \cdot \frac{e^{y^2}}{e^{y^2/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{x^2+y^2}{2e^{x^2/2}} e^{y^2/2} \Rightarrow \boxed{z = \frac{x^2+y^2}{2} e^{(y^2-x^2)/2}}$$, η οποία είναι

η ζητούμενη λύση.

Επαληθεύουμε: Πάνω στην αρχική καμπύλη C: $x=t$
$y=t$, $t>0$

η λύση έχει την μορφή:

$$z = \frac{t^2+t^2}{2} \cdot e^{(t^2-t^2)/2} \Rightarrow z = t^2 \cdot e^0 \Rightarrow \underline{\underline{z=t^2}}$$, που μας έχει δοθεί

από υπόθεση.

β) Στον $\mathbb{R}^2$ έχουμε τον διαφορικό τελεστή:

$$P(x,D) = a_1(x)\,D_1 + a_2(x)\,D_2 + c(x) \qquad (1)$$

Το κύριο μέρος αυτού του γραμμικού μερικού διαφορικού τελεστή είναι το: $P_m(x,D) = \sum_{|\alpha|=m} a^\alpha(x)\,D^\alpha = a_1(x)\,D_1 + a_2(x)\,D_2$, δηλαδή

το άθροισμα των μεγιστοβάθμιων όρων της εξίσωσης.
Ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζει μία διεύθυνση στον $\mathbb{R}^n$. Μία διεύθυνση που ορίζεται από το μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>χαρακτηριστική διεύθυνση</u> για τον διαφορικό τελεστή $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} a^\alpha(x)\,D^\alpha$ εάν ισχύει: $\underline{P_m(x,\vec{\xi}) = 0}$, όπου P_m είναι το κύριο μέρος του διαφορικού τελεστή. Για τον τελεστή που δίνεται από την εξίσωση (1), η <u>χαρακτηριστική διεύθυνση</u> στο $x' \in \mathbb{R}^2$ είναι αυτή που ορίζεται από το διάνυσμα $\vec{\xi}' \in \mathbb{R}^2$ για το οποίο ισχύει: $P_1(x', \xi') = 0$.

Έστω C μια λεία καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ και έστω x° ένα σημείο της C. Η καμπύλη C λέγεται <u>χαρακτηριστική στο x° για τον τελεστή $P(x,D)$</u> εάν ένα διάνυσμα κάθετο στην C στο σημείο x° ορίζει χαρακτηριστική διεύθυνση για τον $P(x,D)$ στο x°.
Εάν η καμπύλη C είναι χαρακτηριστική για τον $P(x,D)$ σε κάθε σημείο της, τότε ονομάζεται <u>χαρακτηριστική καμπύλη</u> για τον $P(x,D)$.

Έχουμε $\quad P(x,D) = a_1(x)\,D_1 + a_2(x)\,D_2 + c(x)$ στο $\mathbb{R}^2$.

Η τάξη του τελεστή είναι $m=1$ και το κύριο μέρος του είναι το: $P_1(x,D) = a_1(x)\,D_1 + a_2(x)\,D_2$.
Η χαρακτηριστική εξίσωση του τελεστή είναι: $a_1(x)\xi_1 + a_2(x)\xi_2 = 0$

Έστω C η χαρακτηριστική καμπύλη του τελεστή που δίνεται

Παραμετρικά από τις σχέσεις: $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t)$.

Η εφαπτομένη αυτής της καμπύλης δίνεται από τα $\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right)$ και άρα, ένα διάνυσμα κάθετο στην C δίνεται από τα $\left(\frac{dx_2}{dt}, -\frac{dx_1}{dt}\right)$. Επομένως έχουμε:

$a_1(x_1, x_2)\frac{dx_2}{dt} - a_2(x_1, x_2)\frac{dx_1}{dt} = 0$, δηλαδή οι χαρακτηριστικές καμπύλες του τελεστή είναι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης: $a_1 dx_2 - a_2 dx_1 = 0$

γ) $\begin{cases} u_t = (\sin u) u_x \\ u(0,x) = 1 + x \end{cases}$

Σε αυτό το ΠΑΤ έχουμε ότι $\varphi = 1 + x$, η οποία είναι αναλυτική σε όλο τον άξονα των x.
Επίσης $F(t, x, u, \nabla u) = (\sin u)\nabla u$. (2)

Για $t=0$, $x=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u(0,0) = 1 \\ \varphi'(0) = \nabla u(0,0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Η συνάρτηση F είναι αναλυτική σε μια γειτονιά του $(0,0,1,1) \in \mathbb{R}^4$ (συγκεκριμένα, είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{R}^4$).
Άρα, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Cauchy-Kovalevsky για το ΠΑΤ.
Επομένως, το ΠΑΤ έχει αναλυτική λύση σε μια περιοχή του (0,0).

Υπολογίζουμε τους όρους μέχρι και δεύτερης τάξης της σειράς Taylor:

- $u(0,x) = 1 + x$, $u_x(0,x) = 1$, $u_{xx} = 0$
  άρα $u(0,0) = 1$, $u_x(0,0) = 1$, $u_{xx}(0,0) = 0$ (3)

- $u_t = (\sin u) u_x$, $u_{tx} = u_x^2 \cos u + \sin u \, u_{xx}$
  άρα, $u_t(0,0) = (\sin 1) \cdot 1 \Rightarrow u_t(0,0) = \sin 1$
  $u_{tx} = 1^2 \cdot \cos 1 + \sin 1 \cdot 0 \Rightarrow u_{tx}(0,0) = \cos 1$

- $u_{tt} = u_t \cos u \, u_x + u_{tx} \sin u$, άρα, $u_{tt}(0,0) = 2 \sin 1 \cos 1$

Επομένως, η σειρά Taylor μέχρι και τάξη 2 είναι περί το $(0,0)$:

$$u(t,x) = \sum_{(\alpha_t, \alpha_x)} \frac{D_t^{\alpha_t} D_x^{\alpha_x} u(0,0)}{\alpha_t! \, \alpha_x!} t^{\alpha_t} x^{\alpha_x} =$$

$$= u(0,0) + u_t(0,0)(t-0) + u_x(0,0)(x-0) +$$
$$+ \frac{1}{2!} u_{tt}(0,0)(t-0)^2 + \frac{1}{2!} u_{xx}(0,0)(x-0)^2 + \frac{1}{1!1!} u_{tx}(0,0)(t-0)(x-0) + \ldots =$$

$$\Rightarrow u(t,x) = 1 + t \cdot \sin 1 + x + \frac{1}{2} 2 \sin 1 \cos 1 \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 + \cos 1 \cdot t \cdot x + \ldots$$

$$\Rightarrow \underline{u(t,x) = 1 + t \sin 1 + x + t^2 \sin 1 \cos 1 + t \cdot x \cos 1 + \ldots}$$

Θέμα 3

a) • Έστω το Π.Α.Τ.

$$\left\{ \begin{array}{l} a(x)\, z_x + z_y = 0 \\ z(x,0) = f(x) \end{array} \right\}, \text{ όπου } a, f \in C^1$$

Σύμφωνα με γνωστό πόρισμα, αυτό το πρόβλημα έχει μοναδική λύση σε όλες τις περιοχές της αρχικής ευθείας $y=0$. Για να βρούμε την λύση, δουλεύουμε ως εξής:

$\frac{dx}{a(z)} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{0}$, όπου βρίσκουμε ότι τα δύο πρώτα ολοκληρώματα του συστήματος είναι τα: $u_1 = z$, $u_2 = x - a(z)y$.

Άρα, το γενικό ολοκλήρωμα της αρχικής εξίσωσης είναι το $z = F(x - a(z)y)$.

Προκειμένου να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη $z(x,0) = f(x)$, πρέπει να πάρουμε $F(x) = f(x)$. Έτσι, για αρκετά μικρό $|y|$, η λύση του Π.Α.Τ. ορίζεται πεπλεγμένα ως: $\boxed{z = f(x - a(z)y).}$ (1)

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων, εύκολα αποδεικνύεται ότι η λύση του Π.Α.Τ. υπάρχει και ορίζεται πεπλεγμένα από την εξίσωση (1), αν ισχύει ότι:

$1 + f'(x - a(z)y)\, a'(z)y > 0.$ (2)

Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του $|y|$, η ανίσωση (2) ικανοποιείται πάντα.

Σημειώνουμε ότι με τον όρο "λύση" του Π.Α.Τ. εννοούμε μια

διαφορίσιμη συνάρτηση $z(x,y)$.

- Θεωρούμε τώρα ένα σταθερό σημείο x_0 του άξονα των x και έστω ότι $z_0 = f(x_0)$. Τότε, το σύνολο των σημείων (x,y,z) που ικανοποιούν το ζεύγος εξισώσεων:

$$x - a(z_0)y = x_0 \quad , \quad z = z_0 \qquad (3)$$

ικανοποιεί επίσης την εξίσωση (1).
Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία του (x,y,z)-χώρου που ορίζεται από τις εξισώσεις (3), ανήκει στην επιφάνεια που ορίζει η εξίσωση (1). Αυτό συνεπάγεται ότι κατά μήκος της ευθείας $x - a(z_0)y = x_0$ (4) του (x,y)-επιπέδου που περνά από το σημείο $(x_0, 0)$, η λύση z του Π.Α.Τ. είναι <u>σταθερή</u> και ίση με $z_0 = f(x_0)$.

Εάν δεν υπάρχουν ευθείες της μορφής (4) που να τέμνονται στο ημ-επίπεδο $y>0$, καταλήγουμε ότι η λύση υπάρχει ως μια διαφορίσιμη συνάρτηση για κάθε $y>0$.

- Έστω δύο σημεία $x_1 < x_2$ της αρχικής ευθείας $y=0$ και έστω $z_1 = f(x_1)$, $z_2 = f(x_2)$ και $a(z_1) > a(z_2)$.
Τότε, οι ευθείες $x - a(z_1)y = x_1$ και $x - a(z_2)y = x_2$ τέμνονται στο σημείο (x_0, y_0), όπου: $y_0 = \dfrac{x_2 - x_1}{a(z_1) - a(z_2)}$

Στο σημείο (x_0, y_0) οι ευθείες είναι **ασυμβίβαστες**, αφού $z_1 \neq z_2$ και, λόγω μοναδικότητας το z δεν μπορεί να είναι ίσο με το z_1 και z_2 ταυτόχρονα. Έτσι, η λύση <u>παύει να ορίζεται</u> ως μια διαφορίσιμη συνάρτηση για κάθε $y \geq y_0$ και έτσι δημιουργείται σοκ.

β) Από το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων έχουμε:

$$z_x = -\frac{u_x}{u_z}, \quad z_y = -\frac{u_y}{u_z}, \quad \text{και έτσι}$$

$$P z_x + Q z_y = \frac{-P u_x - Q u_y}{u_z} = -\frac{R \cancel{u_z}}{\cancel{u_z}} = R.$$

<u>Θέμα 4</u>

Έχουμε το πρόβλημα Dirichlet: $\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$

με Ω φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^3$ και f γνωστή συνεχή συνάρτηση του $\partial\Omega$

Μοναδικότητα γι' αυτό το πρόβλημα, σημαίνει ότι το πρόβλημα έχει το πολύ μία λύση. Η απόδειξη παρατίθεται αμέσως:

Πρέπει να δείξουμε ότι οποιεσδήποτε δύο λύσεις του προβλήματος ταυτίζονται.
Έστω u_1 και u_2 δύο οποιεσδήποτε λύσεις και η διαφορά τους: $\bar{u} = u_1 - u_2$. Τότε, η διαφορά $\bar{u}$ είναι συνεχής στην κλειστότητα του Ω, $\bar{\Omega}$, αρμονική στο Ω και μηδενική στο $\partial\Omega$ (σύνορο του Ω).
~~Έτσι,~~ Όμως, από την Αρχή του Μεγίστου, η $\bar{u}$ πρέπει να έχει την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της στο $\partial\Omega$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $\bar{u} \equiv 0$ στο $\bar{\Omega}$ και κατά συνέπεια, $u_1 \equiv u_2$ στο $\bar{\Omega}$.

Για να ορίσουμε την ευστάθεια του προβλήματος (δηλαδή την συνεχή εξάρτηση του προβλήματος από τα δεδομένα), εργαζόμαστε ως εξής:

Έστω f_1 και f_2 δύο συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο $\partial\Omega$. Έστω, επίσης, u_1, η λύση του δοθέντος προβλήματος Dirichlet, με $f=f_1$ και u_2 η λύση με $f=f_2$. Για κάθε $\varepsilon>0$, εάν $|f_1(x)-f(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in\partial\Omega$ (1) τότε $|u_1(x)-u_2(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in\bar{\Omega}$. (2)

Αποδεικνύοντας, έστω $\bar{u}=u_1-u_2$. Τότε η $\bar{u}$ είναι αρμονική στο Ω, συνεχής στο $\bar{\Omega}$ και από την σχέση (1): $|\bar{u}(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in\partial\Omega$. Άρα, από την Αρχή Μεγίστου, έχουμε $|\bar{u}(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in\bar{\Omega}$ και από εδώ συνεπάγεται ότι $|u_1(x)-u_2(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in\bar{\Omega}$.

Η συνθήκη που πρέπει να ισχύει για να υπάρχει λύση είναι: Έστω οι κωνικές επιφάνειες που επιτυγχάνονται αν περιστρέψουμε τις καμπύλες: $y=x^k$, $x\geq 0$, $k\geq 1$ γύρω από τον άξονα των x. Οι επιφάνειες αυτές είναι τα όρια των "αμαθών" όγκων με την ιδιότητα των κορυφών να αυξάνεται κατά k. Για να υπάρχει λύση στο πρόβλημα Dirichlet, πρέπει η άκρη κάποιας κορυφής των συγκεκριμένων όγκων να μπορεί να ακουμπά κάθε $x\in\partial\Omega$, όπου Ω είναι το χωρίο του προβλήματος, έτσι ώστε όλα τα σημεία του όγκου τα οποία βρίσκονται σε απόσταση όχι μεγαλύτερη από κάποιον θετικό αριθμό ρ από την αντίστοιχη κορυφή, να βρίσκονται εκτός του χωρίου Ω.