Εξέταση «Βελτιστοποίησης»: Ιούλιος 2015

Θέμα 1 (α) Έστω $f: V \to R, \bar{x} \in V \subset R^n, f \in C^2$ κοντά στο $\bar{x}$ και $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Αποδείξτε ότι αν ο Εσσιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος τότε το σημείο $\bar{x}$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

(β) Έστω $f: S \subset R^n \to R$ μία συνάρτηση συνεχής και πιεστική, ορισμένη στο μη κενό, κλειστό και μη φραγμένο σύνολο S. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ελαχίστου.

(γ) Να μελετηθεί η ύπαρξη σημείου τοπικού ελαχίστου για την συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, στο σύνολο περιορισμών $S = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-1)^2 = 1\}$.

Θέμα 2 Έστω $f: R^3 \to R, f(x,y,z) = 2x + y + z$ και το σύνολο περιορισμών (δίσκος) $U = \left\{(x,y,z) \in R^3 \,/\, x^2 + y^2 \le 3, z = 1\right\}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο ελαχίστου της f στο U, και να υπολογιστεί αυτό με βάση το θεώρημα των πολλαπλασιαστών Kuhn-Tucker-Lagrange. Είναι το σημείο αυτό μοναδικό;

Θέμα 3 (α)Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ και το σύνολο περιορισμών $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$. Να εκτελεστεί ένα βήμα των προβεβλημένων κλίσεων με αρχικό διάνυσμα το $[1/3, 1/2]^T$.

(β) Να αποδείξετε ότι y_k είναι η προβολή του διανύσματος $x_k - \frac{1}{\gamma}\nabla f(x_k)$ στο σύνολο των περιορισμών. $x_k - \frac{1}{\gamma}\nabla f(x_k)$

Θέμα 4 (α) Δίνονται οι περιορισμοί

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 9, x + y = 1, x - y = 2.$$

Να βρεθεί κατάλληλη ποινικοποιημένη συνάρτηση που αντιστοιχεί στους παραπάνω περιορισμούς.

(β) Να ορίσετε την μεικτή μέθοδο προβεβλημένων κλίσεων-ποινών για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, πάνω στο σύνολο των περιορισμών του ερωτήματος (α),

Αλγόριθμος των προβεβλημένων κλίσεων (με βέλτιστο βήμα):

1) Θέτουμε κ=0, και επιλέγουμε $x_0 \in U$.
2) Βρίσκουμε κατεύθυνση ώστε y_k

$$\zeta_k := \nabla f(x_k)^T (y_k - x_k) + \frac{\gamma}{2}\|y_k - x_k\|_2^2 = \min_{y \in U}\left(\nabla f(x_k)^T (y - x_k) + \frac{\gamma}{2}\|y - x_k\|_2^2\right)$$

3) Θέτουμε $\delta_k = \nabla f(x_k)^T (y_k - x_k)$. Αν $\delta_\kappa = 0$ σταματάμε. Διαφορετικά,
4) Βρίσκουμε βήμα α_κ ώστε
$$f(x_k + \alpha_k(y_k - x_k)) - f(x_k) = \min_{\{\alpha \in [0,1]\}}(f(x_k + \alpha(y_k - x_k)) - f(x_k))$$
5) $x_{k+1} = x_k + \alpha_k(y_k - x_k)$

Καλή επιτυχία. Διάρκεια εξέτασης, 2 & ½ ώρες.