ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Επαναληπτική Εξέταση στη Μαθηματική Ανάλυση Ι
ΟΜΑΔΑ: Β

5 Οκτωβρίου, 2012

Θέμα 1. Έστω A, B μη κενά άνω φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών. Αν $\sup B < \sup A$, αποδείξτε ότι υπάρχει στοιχείο $\alpha \in A$ που να είναι άνω φράγμα του συνόλου B. Ισχύει το συμέρασμα αν $\sup B \leq \sup A$; (1 μον.)

Λύση. Αν επιλέξουμε $\varepsilon = \sup A - \sup B > 0$, τότε από τον χαρακτηρισμό του supremum θα υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε

$$\alpha > \sup A - \varepsilon = \sup A - \sup A + \sup B = \sup B\,.$$

Άρα $\alpha > \beta$, για κάθε $\beta \in B$, δηλαδή το α είναι άνω φράγμα του B.

Αν η ανισότητα δεν είναι γνήσια, τότε δεν ισχύει το συμπέρασμα (μπορούμε για παράδειγμα να πάρουμε $A = [0,1)$ και $B = [1/2,1)$). ■

Θέμα 2. Έστω (α_ν) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών.

(α′) Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{3+\nu^2\alpha_\nu}$$

συγκλίνει. (1 μον.)

(β′) Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ αποκλίνει, αποδείξτε ότι και η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{3+\alpha_\nu}$$

θα αποκλίνει. (1 μον.)

Λύση.

(α′) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ είναι

$$0 < \frac{\alpha_\nu}{3+\nu^2\alpha_\nu} < \frac{\alpha_\nu}{\nu^2\alpha_\nu} = \frac{1}{\nu^2}\,.$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(1/\nu^2\right)$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης για σειρές με θετικούς όρους και η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{3+\nu^2\alpha_\nu}$ θα συγκλίνει.

(β′) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

– *Η ακολουθία (α_ν) είναι άνω φραγμένη*, δηλαδή υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $\alpha_\nu \leq M$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\frac{\alpha_\nu}{3+\alpha_\nu} \geq \frac{\alpha_\nu}{3+M} = \frac{1}{3+M}\cdot\alpha_\nu\,,$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ και συνεπώς από το κριτήριο σύγκρισης για σειρές με θετικούς όρους και η σειρά $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{3+\alpha_\nu}$ θα αποκλίνει.

– *Η ακολουθία (α_ν) δεν είναι άνω φραγμένη.* Τότε υπάρχει υπακολουθία (α_{κ_ν}) της (α_ν) με

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_{\kappa_\nu} = +\infty\,.$$

Επομένως

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\alpha_{\kappa_\nu}}{3+\alpha_{\kappa_\nu}} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{3/\alpha_{\kappa_\nu}+1} = 1$$

και κατά συνέπεια $\lim_{\nu\to\infty} \frac{\alpha_\nu}{3+\alpha_\nu} \neq 0$. Άρα, από το κριτήριο απόκλισης η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{3+\alpha_\nu}$ θα αποκλίνει.

■

Θέμα 3. (α′) Διατυπώστε το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες και το θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις. (0,5 μον.)

(β′) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του $[a, b]$, τέτοια ώστε

$$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. (0,8 μον.)

(γ′) Έστω $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν $g(r) = h(r)$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$, είναι $g(x) = h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας. (0,7 μον.)

Λύση.

(α′) **Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες**: Κάθε φραγμένη ακολουθία περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις: Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A που συγκλίνει στο x_0, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$.

(β′) Η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη και επομένως από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) με $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0$. Είναι $a \leq x_{k_n} \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κατά συνέπεια το $x_0 \in [a, b]$. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k_n}} = 0\,.$$

(γ′) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι σύνολο πυκνό στο $\mathbb{R}$, υπάρχει ακολουθία r_n ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $r_n \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε

$$x - \frac{1}{n} < r_n < x + \frac{1}{n}\,.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Επειδή οι g, h είναι συνεχείς συναρτήσεις, από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(r_n) = \lim_{n\to\infty} h(r_n) = h(x)\,.$$

Άρα, $g(x) = h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

■

Θέμα 4. Έστω η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $\lim_{x\to b^-} f'(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η f είναι από αριστερά παραγωγίσιμη στο b και $f'_-(b) = \lambda$. (Δηλαδή, $f'_-(b) = f'(b-)$.) (1 μον.)

Λύση. Επειδή $\lim_{x\to b^-} f'(x) = \lambda$,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } \delta > 0, \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } x \text{ με } a \le b-\delta < x < b \text{ είναι } |f'(x) - \lambda| < \varepsilon\,. \qquad (1)$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής για κάθε $t \in (b-\delta, b)$ υπάρχει $\xi \in (t,b)$, τέτοιο ώστε

$$\frac{f(b)-f(t)}{b-t} = f'(\xi)\,.$$

Επομένως, από την (1) για $x = \xi$ προκύπτει ότι

$$\text{για κάθε } t \in (b-\delta, b)\,, \quad \left|\frac{f(t)-f(b)}{t-b} - \lambda\right| < \varepsilon\,.$$

Δηλαδή $f'_-(b) = \lim_{t\to b^-} \frac{f(t)-f(b)}{t-b} = \lambda$. Άρα, η αριστερά παράγωγος της f στο b υπάρχει και ισούται με λ. ■

Θέμα 5. Έστω I ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και γνήσια μονότονη συνάρτηση.

(α′) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in I$ και $f'(x_0) \neq 0$, αποδείξτε ότι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και ισχύει

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

(1 μον.)

(β′) Αν η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = (1+x^4)^{-1/2}$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι η αντίστροφη συνάρτηση $g = f^{-1}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$g''(x) = 2g(x)^3 \text{ για κάθε } x \in f(I)\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α′) Πρέπει να δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h}$$

υπάρχει και ισούται με $1/f'(x_0)$. Παίρνουμε το h αρκετά μικρό, $h \neq 0$, έτσι ώστε το $y_0 + h$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f^{-1}(δηλαδή στο πεδίο τιμών της f). Επειδή η f είναι $1-1$, υπάρχει **μοναδικό** $t \neq 0$ τέτοιο ώστε $y_0 + h = f(x_0+t)$. Επομένως,

$$h = f(x_0+t) - y_0 = f(x_0+t) - f(x_0)$$

και

$$x_0 + t = f^{-1}(y_0+h), \text{ οπότε } t = f^{-1}(y_0+h) - x_0 = f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)\,.$$

Ως γνωστόν η f^{-1} είναι συνεχής και επομένως $\lim_{h\to 0}[f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)] = 0$. Δηλαδή το $t \to 0$ καθώς το $h \to 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} &= \lim_{t\to 0} \frac{t}{f(x_0+t) - f(x_0)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.\end{aligned}$$

Άρα, η παράγωγος $(f^{-1})'(y_0)$ υπάρχει και ισούται με $1/f'(x_0)$.

(β′) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in I$, η f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα I. Για κάθε $x \in f(I)$ έχουμε

$$\begin{aligned} g'(x) = (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \text{(από το (α′))} \\ &= \left\{1 + [f^{-1}(x)]^4\right\}^{1/2} \end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} g''(x) &= 2\frac{[f^{-1}(x)]^3 (f^{-1})'(x)}{\left\{1 + [f^{-1}(x)]^4\right\}^{1/2}} \\ &= 2[f^{-1}(x)]^3 \\ &= 2g(x)^3 \,. \end{aligned}$$

■

Θέμα 6. (α′) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{4-x}}\, dx \,.$$

(1 μον.)

(β′) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, αποδείξτε ότι

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\, dx = f(0) \ln 2 \,.$$

(1 μον.)

(γ′) Αποδείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \ln t \, dt$ συγκλίνει και ισούται με -1. (1 μον.)

Λύση.

(α′) Είναι

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{4-x}}\, dx &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t\sqrt{4-t^2}} 2t\, dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2\text{)} \\ &= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2^2 - t^2}}\, dt \\ &= 2 \arcsin \frac{t}{2}\Big|_{t=\sqrt{2}}^{t=\sqrt{3}} \\ &= 2\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} \,. \end{aligned}$$

(β′) Για $0 < \varepsilon < 1/2$ τα $\varepsilon, 2\varepsilon \in (0,1)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και η $g(x) = 1/x$ είναι θετική και συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\varepsilon, 2\varepsilon]$, από το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα είναι

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\, dx = f(\xi(\varepsilon)) \cdot \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{1}{x}\, dx = f(\xi(\varepsilon))\,(\ln 2\varepsilon - \ln \varepsilon) = f(\xi(\varepsilon)) \ln 2 \,, \qquad (2)$$

για κάποιο $\xi(\varepsilon) \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$. Επειδή η f είναι συνεχής και $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \xi(\varepsilon) = 0$, θα είναι $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f(\xi(\varepsilon)) = f(0)$. Άρα, από τη (2) έχουμε

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\, dx = f(0)\ln 2\,.$$

(γ′) Για κάθε $x \in (0,1)$

$$\int_x^1 \ln t\, dt = t\ln t\big|_{t=x}^{t=1} - \int_x^1 dt = -x\ln x - 1 + x \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln t\, dt &= \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \ln t\, dt \\
&= \lim_{x\to 0^+} (-x\ln x - 1 + x) \\
&= -\lim_{x\to 0^+} x\ln x - 1 \\
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} - 1 \\
&= \lim_{x\to 0^+} x - 1 && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= -1\,.
\end{aligned}$$

Δηλαδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \ln t\, dt$ συγκλίνει και ισούται με -1.

■

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες