ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Συναρτησιακή Ανάλυση

2-3-2015

Θέμα 1. (α) Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής.

(i) Δώστε τους ορισμούς των $KerT$, ImT και δείξτε ότι είναι διανυσματικοί υπόχωροι των X και Y αντίστοιχα.

(ii) Αν ο T είναι $1-1$ και $D \subset X$ γραμμικά ανεξάρτητο, τότε $T[D]$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του Y.

(iii) Αν ο X έχει υπεραριθμήσιμη Hamel βάση και ο Y έχει αριθμήσιμη Hamel βάση, δείξτε ότι $KerT \neq \{0_X\}$.

(β) Δείξτε ότι κάθε χώρος με νόρμα και άπειρη αριθμήσιμη Hamel βάση δεν είναι πλήρης (διατυπώστε τα αποτελέσματα που θα χρησιμοποιήσετε).

Θέμα 2. (a) Έστω H χώρος Hilbert και F υπόχωρος του H πεπερασμένης διάστασης.

(i)Δείξτε ότι υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ του F.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $x \in H$, το διάνυσμα $x - \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$ είναι ορθογώνιο στον F.

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $x \in H$, $\rho(x, F) = \|x - \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i\|$.

(b)(i) Διατυπώστε και αποδείξτε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

(ii) Δείξτε ότι η νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ στον $C[0,1]$ δεν ορίζεται από εσωτερικό γινόμενο.

Θέμα 3. Θέτουμε c τον χώρο των συγκλινουσών ακολουθιών, $c = \{(a_n)_n : \lim_n a_n = a, a \in \mathbb{R}\}$.

(i) Δείξτε ότι ο c είναι διανυσματικός χώρος.

(ii) Θεωρείστε το $f : c \to \mathbb{R}$ με $f\big((a_n)_n\big) = \lim_n a_n$. Δείξτε ότι το f είναι γραμμικό και βρείτε το $\mathrm{Ker} f$.

(iii) Εφοδιάζουμε το c με τη supremum νόρμα $\|(a_n)_n\|_\infty = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ και ορίζουμε $T : c \to c_0(\mathbb{N})$ με

$$T\big((a_n)_n\big) = (a, a_1 - a, a_2 - a, \ldots)$$

όπου $a = \lim_n a_n$. Δείξτε ότι ο T είναι 1-1, επί και συνεχής.

Θέμα 4. Έστω X χώρος με νόρμα, Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X και $x_0 \in X \setminus Y$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$, $Y \subset \ker x^*$ και $x^*(x_0) = \mathrm{dist}(x_0, Y)$.

(β) Δείξτε ότι ο $Z = \langle Y \cup \{x_0\} \rangle$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

Θέμα 5. Έστω X χώρος με νόρμα και $K \subseteq X$ με K κυρτό και $0 \in K^o$.

(i) Δώστε τον ορισμό του συναρτησιοειδούς Minkowski ρ_K.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $x \in X$, $\rho_K(x) < \infty$.

(iii) Αν $x \in X$ ώστε για κάθε $\lambda > 0$ $\lambda x \in K$, δείξτε ότι $\rho_K(x) = 0$.

(iv) Δείξτε ότι:

(1) Για $\lambda > 0$, $\rho_k(\lambda x) = \lambda \rho_k(x)$

(2) $\rho_k(x + y) \leq \rho_k(x) + \rho_k(y)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!