Θέμα 1 + Θέμα 2 = 6 μονάδες
Θέμα 3 + Θέμα 4 = 4 μονάδες

Διαφορική Γεωμετρία καμπυλών και επιφανειών **Ιούλιος 2015**

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ 1: Έστω η επιφάνεια $S:\boldsymbol{r}(u,v),\ (u,v)\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ κλάσης 2. **(Ι)** Αρχίζοντας από την γεωδαισιακή διαφορική εξίσωση της επιφάνειας, δείξτε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες: **α)** Η παραμετρική καμπύλη $v=v_0$ είναι γεωδαισιακή καμπύλη της S **β)** $\Gamma^2_{11}=0$, **γ)** $EE_2+FE_1-2EF_1=0$ όπου όλα τα μεγέθη της επιφάνειας που εμφανίζονται στις παραπάνω εξισώσεις υπολογίζονται στο $(u,\ v_0)$.

(ΙΙ) Προσδιορίστε την γεωδαισιακή καμπύλη c της επιφάνειας $\boldsymbol{r}(\theta,t)=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ t)\ (\theta,\ t)\in[-\pi,\ \pi)\times(-10,\ 10)$ που περνά από το σημείο $\boldsymbol{r}(0,1)$ και έχει διεύθυνση στο σημείο αυτό $(2,\ 3)$.

$E=1,\ F=0,\ G=1$
$\Gamma_{ij,k}=0$

ΘΕΜΑ 2: Έστω η επιφάνεια $S:\boldsymbol{r}(u,v),\ (u,v)\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ κλάσης 2.

Α) Αν θεωρήσουμε την καμπύλη $c:\varphi(s)=\boldsymbol{r}(u(s),\ v(s)),\ s\in I$ της επιφάνειας, όπου s φυσική παράμετρος, δώστε τον ορισμό του διανύσματος κάθετης καμπυλότητας και της καμπυλότητας της καμπύλης και αρχίζοντας από αυτούς τους ορισμούς δείξτε ότι η καμπυλότητα $\kappa_n(s)$ στο τυχαίο σημείο $\varphi(s)$ της καμπύλης δίνεται από τον τύπο:

$$\kappa_n(s)=L\left(u'(s)\right)^2+2Mu'(s)v'(s)+N\left(v'(s)\right)^2$$

Όπου $L,\ M,\ N$ τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης της επιφάνειας στο σημείο $\varphi(s)$.

Β) Προσδιορίστε την εξίσωση της κάθετης τομής c της επιφάνειας $S:\boldsymbol{r}(u,v)=(u,\ u+v,\ uv),\ u,\ v>0$ στο σημείο $\boldsymbol{r}(1,1)$ με διεύθυνση $(-1,\ 1)$. Ποια είναι η κάθετη καμπυλότητα της c στο σημείο $\boldsymbol{r}(1,1)$

ΘΕΜΑ 3. Μια σκάλα μήκους L είναι τοποθετημένη ώστε η κορυφή της να ακουμπά σε ένα κατακόρυφο τοίχο (θετικός άξονας Oy) στο σημείο Β και η βάση της στο σημείο Α του πατώματος (θετικός άξονας Ox). Η σκάλα αρχίζει να ολισθαίνει ώστε το σημείο Α να κινείται προς τα θετικά του άξονα Ox. Έστω a η οξεία γωνία που σχηματίζει η σκάλα με τον άξονα Ox.

Α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση της οικογένειας των ευθειών με παράμετρο το a που περιγράφει τις διάφορες θέσεις της σκάλας είναι $\dfrac{x}{\cos a}+\dfrac{y}{\sin a}=L$. **Β)** Να δειχθεί ότι η περιβάλλουσα της οικογένειας των ευθειών έχει παραμετρικές εξισώσεις $x=L\cos^3 a,\ \ y=L\sin^3 a$ και να βρεθεί η καρτεσιανή μορφή της.

ΘΕΜΑ 4:. Δίνεται η καμπύλη $(c):\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\left(1\text{-cost},\ \frac{1}{2}(1\text{-sint}),\ \frac{\sqrt{3}}{2}(1\text{-sint})\right)$.

Α) Να εξετασθεί αν είναι φυσική και να βρεθεί το δεύτερο κάθετο διάνυσμα **Β** και η καμπυλότητα της. **Β)** Να αποδειχθεί ότι η καμπύλη είναι επίπεδη και να βρεθεί το επίπεδό της. **Γ)** Να δειχθεί ότι η καμπύλη των κέντρων καμπυλότητας εκφυλίζεται σε ένα σημείο, **Δ)** Να αποδείξετε ότι η (c) είναι κύκλος και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

<u>Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες</u>

<u>Καμπύλες του</u> $\mathbb{R}^2$ **Εφαπτόμενο και κάθετο μοναδ/ο διάνυσμα:** $\upsilon(t)=\|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|$ $\boldsymbol{T}(t_0)=\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)/\upsilon(t)$ $\boldsymbol{N}(t_0)=J\boldsymbol{T}(t)$, όπου $J(x_1,x_2)=(-x_2,x_1)$ **Φυσική παράμετρος :** <u>Καμπυλότητα:</u> $\kappa 2(s)=\boldsymbol{r}''(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)$ **<u>Τύποι</u>** **<u>Frenet</u>:** $\boldsymbol{T}'(s)=\kappa 2(s)\boldsymbol{N}$ $\boldsymbol{N}'(s)=-\kappa 2(s)\boldsymbol{T}$ **Τυχαία παράμετρος:** $\upsilon(t)=\|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|=\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)\right)^{1/2}$, $\kappa(t)=\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\cdot J\dot{\boldsymbol{r}}(t)/\upsilon^3(t)$, $\kappa(t)=\left(\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\ddot{x}(t)\dot{y}(t)\right)/\upsilon^3(t)$ **Τύποι Frenet:**

$\dot{T} = \kappa 2\upsilon N$, $\dot{N} = -\kappa 2\upsilon T$. <u>Καμπύλες του</u> $\mathbb{R}^3$ ***φυσική παρ/τρος:*** **Βασικά μοναδιαία διανύσματα:** $T(s) = r'(s)$, $N(s) = \dfrac{r''(s)}{\|r''(s)\|}$, $B(s) = T(s) \times N(s)$, **Τύποι Frenet :** $T' = \kappa N$,

$N' = -\kappa T + \tau B$, $B' = -\tau N$, καμπυλότητα : $\kappa(s) = \|T'(s)\| = \|r''(s)\|$, στρέψη $\tau(s) = -N \cdot B'$. **Καμπύλη κέντρων καμπυλότητας** $\mathbf{e}(s) = \mathbf{r}(s) + \dfrac{1}{k(s)}\mathbf{N}(s)$. ***Για τυχαία παράμετρο:*** $\upsilon(t) = \|\dot{r}(t)\|$,

$T = \dfrac{\dot{r}}{\|\dot{r}\|}$, $B = \dfrac{\dot{r} \times \ddot{r}}{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|}$, $N = B \times T$ $\kappa = \dfrac{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|}{\|\dot{r}\|^3}$, $\tau = \dfrac{(\dot{r}\ \ddot{r}\ \dddot{r})}{\|\dot{r} \times \ddot{r}\|^2}$ **Τύποι Frenet :** $\dot{T} = \kappa\upsilon N$,

$\dot{N} = -\kappa\upsilon T + \tau\upsilon B$, $\dot{B} = -\tau\upsilon N$.

Έστω η καμπύλη
C: r(t)
C: φ(s), s φυσική παράμετρος t = t(s).

$$\boxed{\kappa(s) = \varphi''(s)}$$ *διάνυσμα καμπυλότητας*

$$\boxed{\varphi''(s) = \frac{1}{\|r'(t)\|^2}\left[r''(t) - \frac{r''(t)\cdot r'(t)}{\|r'(t)\|^2} r'(t)\right]}$$

$$\boxed{q(s) = \varphi(s) + \frac{1}{\kappa(s)} n(s)}$$ *κέντρο καμπυλότητας*

$$\boxed{\rho(s) = \frac{1}{\|\kappa(s)\|}}$$ *ακτίνα καμπυλότητας*

$$\boxed{\begin{aligned} t'(s) &= \kappa(s)\, n(s) \\ n'(s) &= -\kappa(s)\, t(s) + \tau(s) b(s) \\ b'(s) &= -\tau(s)\, n(s) \end{aligned}}$$ *εξισώσεις Frenet.*

$$\boxed{|\kappa(s)| = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}}$$

$$\boxed{\tau(s) = \frac{[r'(t), r''(t), r'''(t)]}{\|r'(t) \times r''(t)\|^2}}$$

Έστω
S: r(u, v), (u, v)∈Ω
είναι στοιχειώδης επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$.

Θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τάξης

$$\boxed{\begin{aligned} L(u,v) &= r_{11}(u,v)\cdot N(u,v) \\ M(u,v) &= r_{12}(u,v)\cdot N(u,v) \\ N(u,v) &= r_{22}(u,v)\cdot N(u,v) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} L &= -N_1 \cdot r_1 \\ M &= -N_2 \cdot r_1 = -N_1 \cdot r_2 \\ N &= -N_2 \cdot r_2 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \frac{[r_1, r_2, r_{11}]}{H} \\ M &= \frac{[r_1, r_2, r_{21}]}{H} \\ N &= \frac{[r_1, r_2, r_{22}]}{H} \end{aligned}}$$

σύμβολα Christofell

$$\boxed{\Gamma_{ijk}(u,v) = r_i(u,v)\cdot r_{jk}(u,v), \quad (u,v)\in\Omega,}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma^1_{jk}(u,v) &= \frac{G(u,v)\Gamma_{1jk}(u,v) - F(u,v)\Gamma_{2jk}(u,v)}{H^2(u,v)} \\ \Gamma^2_{jk}(u,v) &= \frac{E(u,v)\Gamma_{2jk}(u,v) - F(u,v)\Gamma_{1jk}(u,v)}{H^2(u,v)} \end{aligned}}$$

$$LN - M^2 \begin{cases} >0, & \text{ελλειπτικό} \\ <0, & \text{υπερβολικό} \\ =0 \text{ και } L \neq 0 \text{ ή } N \neq 0 & \text{παραβολικό} \\ =0 \text{ και } L = N = 0, & \text{επίπεδο} \end{cases}$$

Γεωδαισιακές Διαφορικές Εξισώσεις

Έστω η επιφάνεια
S: r(u, v), (u, v)∈Ω
κλάσης 2 και έστω η καμπύλη της επιφάνειας
γ: φ(s) = r(u(s), v(s)). s φυσική παράμετρος.

Η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν για κάθε s (όπου s φυσική παράμετρος) οι u(s), v(s) ικανοποιούν το σύστημα

$$\boxed{\begin{aligned} u''(s) + \Gamma^1_{11}(u'(s))^2 + 2\Gamma^1_{12} u'(s)v'(s) + \Gamma^1_{22}(v'(s))^2 &= 0 \\ v''(s) + \Gamma^2_{11}(u'(s))^2 + 2\Gamma^2_{12} u'(s)v'(s) + \Gamma^2_{22}(v'(s))^2 &= 0 \end{aligned}}$$

Η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν για κάθε s (όπου s φυσική παράμετρος) ισχύουν

$$\boxed{\begin{aligned} E u''(s) + F v''(s) + \Gamma_{111}(u'(s))^2 + 2\Gamma_{112} u'(s)v'(s) + \Gamma_{122}(v'(s))^2 &= 0 \\ F u''(s) + G v''(s) + \Gamma_{211}(u'(s))^2 + 2\Gamma_{212} u'(s)v'(s) + \Gamma_{222}(v'(s))^2 &= 0 \end{aligned}}$$

Η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν για κάθε s ισχύει

$$\boxed{\begin{aligned} &\Gamma^1_{11}(u'(s))^3 + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})(u'(s))^2 v'(s) + (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12})u'(s)(v'(s))^2 - \\ &- \Gamma^1_{22}(v'(s))^3 + u'(s)v''(s) - u''(s)v'(s) = 0 \end{aligned}}$$

Η πρόταση αυτή ισχύει και όταν η s είναι τυχαία παράμετρος