ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α ΚΑΙ Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Ε Σ

9 Φεβρουαρίου 2015

Απαντήστε και στα τρία ισοδύναμα θέματα. Διάρκεια εξέτασης: **2 ώρες και 50 ′**.

ΘΕΜΑ 1ο

(Ι) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $(\mathcal{C}_n, \cdot)$ η κυκλική ομάδα τάξης n.
α) Δείξτε ότι κάθε υποομάδα της $\mathcal{C}_n$ είναι κυκλική.
β) Δείξτε ότι η $\mathcal{C}_n$ έχει ακριβώς μία υποομάδα για κάθε τάξη d που διαιρεί τον n και ότι αυτές είναι όλες οι υποομάδες που διαθέτει.
γ) Δώστε όλες τις υποομάδες της ομάδας $(\mathbb{Z}_{20}, +)$.
(ΙΙ) α) Έστω p πρώτος. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}_p^* = \{\overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$ των μη μηδενικών κλάσεων υπολοίπου modulo p είναι πολλαπλασιαστική ομάδα.
β) Διατυπώσατε και αποδείξτε το Μικρό Θεώρημα Fermat.
γ) Δείξτε ότι το στοιχείο $\overline{8}$ αντιστρέφεται στο $\mathbb{Z}_{13}$ και βρείτε τον αντίστροφό του.

ΘΕΜΑ 2ο

(Ι) α) Στην ομάδα μεταθέσεων S_5 δώστε ένα στοιχείο τάξης 6.
β) Δείξτε ότι στην S_5 δεν υπάρχει στοιχείο τάξης 8.
γ) Βρείτε όλες τις δυνατές τάξεις των στοιχείων της S_5.
(ΙΙ) α) Έστω τυχαία μετάθεση $\sigma \in S_n$ και έστω $c = (a_1 \ldots a_r) \in S_n$ ένας r-κύκλος. Δείξτε ότι $\sigma(a_1 \ldots a_r)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \ldots \sigma(a_r))$, δηλαδή ότι η μετάθεση $c' = \sigma c \sigma^{-1}$ είναι επίσης ένας r-κύκλος.
β) Εφαρμόστε το α) για $c = (1\,2)$ και $\sigma = (1\,2 \ldots n)$, $(1\,2 \ldots n)^2$, $(1\,2 \ldots n)^{n-1}$. Συνάγετε ότι η αντιμετάθεση $(1\,2)$ και ο κύκλος $(1\,2 \ldots n)$ αποτελούν γεννήτορες για την ομάδα S_n. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε γνωστό ότι κάθε μετάθεση $\sigma \in S_n$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο των στοιχειωδών αντιμεταθέσεων $(i,\ i+1)$, $i = 1, \ldots, n-1$.]

ΘΕΜΑ 3ο

α) Έστω G, G' ισομορφικές ομάδες μέσω ισομορφισμού ϕ και έστω στοιχείο $a \in G$ τάξης d. Δείξτε ότι το στοιχείο $\phi(a) \in G'$ είναι επίσης τάξης d.
β) Διατυπώσατε το Θεώρημα Ταξινόμησης Πεπερασμένα Παραγόμενων Αβελιανών Ομάδων.
γ) Δώστε όλες τις μη ισομορφικές αβελιανές ομάδες τάξης 200 σύμφωνα με το Θεώρημα Ταξινόμησης Πεπερασμένα Παραγόμενων Αβελιανών Ομάδων, και στη συνέχεια συμπτύξτε τες κατά το δυνατόν. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.
δ) Για δύο από τις ομάδες του υποερωτήματος γ) αποδείξτε ότι δεν είναι ισομορφικές.
ε) Ταυτοποιήστε την ομάδα-πηλίκο $\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{10\mathbb{Z}\times 20\mathbb{Z}}$ στη λίστα που δώσατε στο ερώτημα γ).
στ) Κατασκευάστε έναν μη τετριμμένο ομομορφισμό ομάδων $\phi : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{20}$ που να μην είναι επιμορφισμός. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Καλή επιτυχία! Σ. Λαμπροπούλου