Εξέταση στην «Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα» (01/ 2017)

Θέμα 1. (2 Βαθμοί) ~~(α)~~ Να ορίσετε τη φασματική ακτίνα πίνακα $A \in C^{n \times n}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\rho(A) < 1$ αν και μόνο αν $\lim_{k \to \infty} A^k = \varnothing$.

Θέμα 2 (3 Βαθμοί) (α) Για το σύστημα Ax=b με b=$[8,8,8]^T$ και

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

να κατασκευάσετε τις εξισώσεις (σε διανυσματική μορφή) της επαναληπτικής μεθόδου χαλάρωσης που αντιστοιχεί στην μέθοδο Gauss-Seidel **(SOR).**
~~(β)~~ Για το σύστημα του ερωτήματος (α) να μελετήσετε την σύγκλιση της μεθόδου χαλάρωσης που αντιστοιχεί στην Gauss-Seidel **(SOR).** Να υπολογιστούν (αν υπάρχουν) τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης για τις οποίες η **SOR** συγκλίνει ταχύτερα από την Gauss-Seidel.

Θέμα 3 (2 Βαθμοί) ~~(α)~~ Για το σύστημα του ερωτήματος 2(α), να ορίσετε την μέθοδο των κλίσεων ως επαναληπτική διαδικασία Richardson ($x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k Q^{-1} r^{(k)}$, όπου $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$).

(β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\| e^{(k+1)} \| \leq \dfrac{k_2(A)-1}{k_2(A)+1} \| e^{(k)} \|$ να βρεθεί το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται ώστε το σφάλμα (σε κατάλληλη νόρμα) να είναι μικρότερο από 10^{-5}. (Δίνεται η λύση του συστήματος x=$[1,1,1]^T$).

Θέμα 4 (3 Βαθμοί) (α) Να υπολογίσετε μία προσέγγιση της μέγιστης (κατά μέτρο) ιδιοτιμής του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

χρησιμοποιώντας 2 επαναλήψεις της μεθόδου των δυνάμεων χρησιμοποιώντας ως αρχικό διάνυσμα το $x^{(0)} = [1,0,0]^T$.
~~(β)~~ Να ορίσετε το πηλίκο Rayleigh, και με τη βοήθεια του να βελτιώσετε την εκτίμηση της πρώτης ιδιοτιμής του ερωτήματος (α).
~~(γ)~~ Έστω $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = 1$ $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = 1$ και $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Αν $u^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ η κ-ιδιοτιμή του A, με $\| u^{(k)} \|_2 = 1$ που ικανοποιεί $\| x - u^{(k)} \|_2 = O(\varepsilon)$ να δειχθεί ότι $R(x) = \lambda_k + O(\varepsilon^2)$.

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες και 30 λεπτά.