3η σειρά ασκήσεων

Άσκηση 1

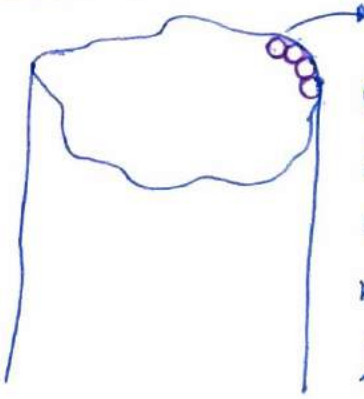
Σωληνοειδές πηνίο πολύ μεγάλου μήκους, σταθερή διατομή (όχι κύκλος) ευθείο σχήμα κάθετο στον z.

Πυκνότητα σπειρών του πηνίου → n

Διαρρέεται από ρεύμα έντασης I

α) Δικαιολογήστε γιατί το πεδίο εξωτ. είναι μηδέν και εσωτ. ομογενές και υπολογίστε την τιμή του.

Λύση

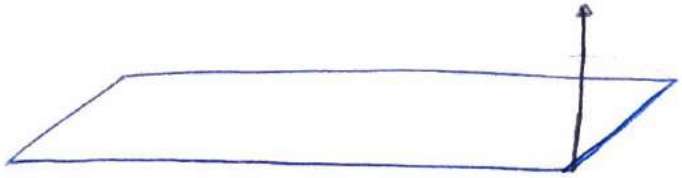


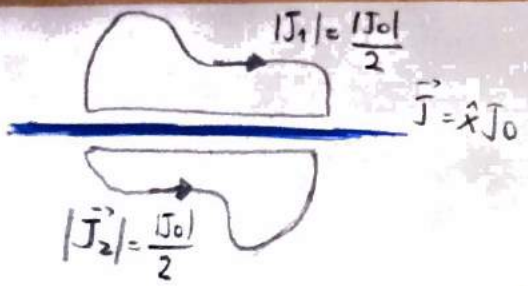
Επαλληλία στοιχ. σωληνοειδών

Από θεωρία ξέρουμε ότι το σωληνοειδές έχει B μέσα ομογενές και B έξω μηδέν. Επομένως, το δοθέν σχήμα μας θα είναι η επαλληλία όλων αυτών των σωληνοειδών.

Στα σημεία επαφής των στοιχ. σωληνοειδών είναι μηδέν διότι αλληλοαναιρούνται.

β) Επίπεδο αγώγιμο φύλλο μηδενικού πάχους εκτείνεται πάνω σ'όλο το επίπεδο (xy) και διαρρέεται από ρεύμα επιφανειακής πυκνότητας $\vec{J} = \hat{x} J_0$. Σε κάποιο σημείο το αγώγιμο φύλλο διχάζεται (κατά μήκος της ευθείας // στον y) σε δύο φύλλα. Καθένα από τα οποία φέρει τη μισή επιφ. πυκνότητα ρεύματος και τα οποία αφού σχηματίσουν "δακτυλιοειδή" κοιλότητα με τοιχώματα // στον y επανασυγκολλούνται και συνεχίζουν ολωσδιόν διχασμούς. Ναι σκεφτείτε τη δοσμένη κατανομή ρεύματος ως επαλληλία κατάλληλων συνιστωσών σε συνδυασμό και με το συμπέρασμα του (α) και να υπολογίστε την ένταση του $\vec{B}$ παντού





Αθροίζουμε τα ρεύματα του διπλανού σχήματος και παίρνουμε ως αποτέλεσμα το ρεύμα του ερωτήματος (β) στην εκφώνηση.

Εφαρμόζουμε αρχή επαλληλίας και στο αντίστοιχο πεδίο

Το πεδία που προκύπτουν από τα επιφανειακά ρεύματα (J_0, J_1, J_2) είναι γνωστά από το άπειρο έκτασης επίπεδο επιφ. ρεύμα και από το ερώτημα (α)

$$\text{Βεκτος } (z>0) = B_{j0} + B_{j1} + B_{j2} = \mu_0 \frac{\vec{J}}{2}(-\hat{y}) + 0 + 0 = -y\mu_0 \frac{j}{2}$$

$$\text{Βεκτός } (z>0) = B_{j0} + B_{j1} + B_{j2} = \mu_0 \frac{j}{2}(-\hat{y}) + \mu_0 \frac{j}{2}(\hat{y}) + 0 = 0$$

$$\text{Βεκτός } (z<0) = B_{j0} + B_{j1} + B_{j2} = \mu_0 \frac{j}{2}(\hat{y}) + 0 + 0 = \mu_0 \frac{j}{2}\hat{y}$$

$$\text{Βεκτός } (z<0) = B_{j0} + B_{j1} + B_{j2} = \mu_0 \frac{j}{2}(\hat{y}) + 0 + \mu_0 \frac{j}{2}(-\hat{y}) = 0$$

Άσκηση 3 (Άσκηση 6.7 σελ. 230)

Αγώγιμο πλαίσιο όπως το σχήμα $a=2m$, $b=2m$ $b'=1m$ εισέρχεται σε χώρο με σταθερό $B_0=1T$. $\perp$ στο επίπεδο του πλαισίου.

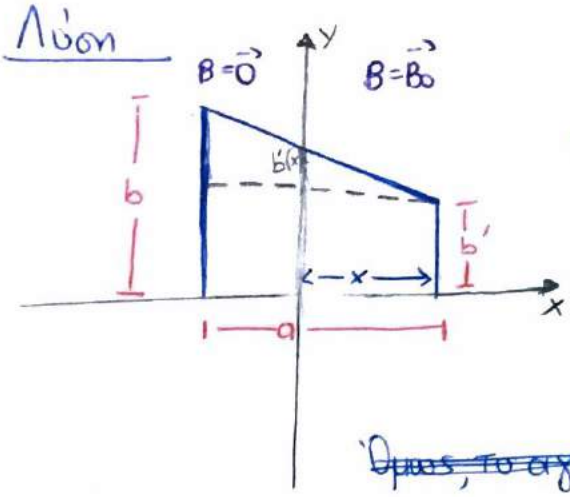
α) Μαγν. ροή ως συνάρτηση απόστασης x

β) $u(x)=?$ ώστε ΗΕΔ σταθερή

γ) Ποια η εξάρτηση της ταχύτητας από τον χρόνο $u(t)$.

u_0: αρχική ταχύτητα.

Λύση



α) Έστω τυχαία χρονική στιγμή που έχει εισέλθει το πλαίσιο κατά x στον χώρο με το μαγν. πεδίο

$$\Phi_B=\int_S \vec{B}\cdot dS = B_0\cdot\int_S dS = \frac{(b(x)+b')\cdot x}{2} = \frac{(b(x)+1)\cdot x}{2}$$

~~Όμως, το αγώγιμο πλαίσιο έχει σταθερή ταχύτητα~~:

$b(x)=b'+b'(x) = 1+b'(x)$. Από ομοιότητα τριγώνων: $\frac{(b-b')}{b'(x)} = \frac{a}{x} \Rightarrow b'(x)=2x$

Άρα τελικά $b(x)=2x+1$

Επομένως, $\Phi_B=\frac{(2x+2)\cdot x}{2} = x^2+x \Rightarrow \Phi_B(x)=x^2+x$.

β). $ΗΕΔ = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -(2x+1)\cdot u(x)$.

Απαιτώ $ΗΕΔ=σταθ \Rightarrow -(2x+1)\cdot u(x)=σταθ \Rightarrow \boxed{u(x)=-\frac{c}{2x+1}}$

γ) ~~[illegible]~~

Άσκηση 2

Σε βήτατρο ένα ιόν φορτίου q και μάζας m διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας R. Το μαγν. πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια του κύκλου κίνησης με μέτρο $B = B(r)$.

α) Δοσ $u = q \cdot R \cdot B(r)/m$ του ιόντος

β) Αν το $B(r)$ αυξάνεται δο ιον επιταχύνεται.

γ) Για να διατηρηθεί το ιόν στην ίδια τροχιά ακτίνας R, δο $\frac{dB(R)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\bar{B}}{dt}$

όπου $B(R)$ η τιμή του B σε ακτίνας R.

και $\bar{B}$: η μέση τιμή του B σε κύκλο ακτίνας R } την ίδια χρονική στιγμή.

$$\bar{B} = \left(\oint_{\text{κύκλο}} B \cdot dS\right) \cdot \frac{1}{S}$$

Λύση

α) Επειδή $\vec{u} \perp \vec{B} \Rightarrow F_m = q \cdot u \cdot B$ και έχει φορά τέτοια ώστε να παρέχει την κεντρομόλο δύναμη της κυκλικής κίνησης

$$F_m = m \cdot \frac{u^2}{R} \Rightarrow q \cdot \cancel{u} \cdot B = m \cdot \frac{u^{\cancel{2}}}{R} \Leftrightarrow |u| = \frac{R \cdot q \cdot B(r)}{m}$$

β) Αφού $|u| = \frac{q \cdot R \cdot B(r)}{m} = \underbrace{\left(\frac{q \cdot R}{m}\right)}_{\text{σταθερά}} \cdot B(r)$. Άρα $|u|$ ανάλογο του $B(r)$

Όσο το $B(r)$ αυξάνεται το ιον θα επιταχύνεται. $\left(\frac{du}{dt} = \frac{qR}{m}\frac{dB(r)}{dt} \; ①\right)$

γ) Η επιτρόχια επιτάχυνση σε κυκλική κίνηση σταθερής τροχιάς $\Rightarrow m \cdot \frac{du}{dt} = qE \Rightarrow E = \frac{m}{q}\frac{du}{dt}$ ③

Από ①,③ $\Rightarrow E = R\frac{dB(r)}{dt}$ ④

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \oint E\,dl = -\frac{d}{dt}\int B(r,t) \cdot 2\pi r\,dr \Rightarrow E \cdot (2\pi R) = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}(r,t) \cdot 2\pi r\,dr \; ②$$

②,④ $\Rightarrow 2\pi R^2 \frac{dB(r)}{dt} = -\frac{d}{dt}\int B(r,t) \cdot 2\pi r\,dr \Rightarrow \frac{dB(r)}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\pi R^2}\int B(r,t) \cdot 2\pi r\,dr\right] \Rightarrow$ Ζητούμενο

Άσκηση 4

Σωληνοειδές μεγάλου μήκους

n σπείρες / μονάδα μήκους

$I(t) = I_0 e^{-at^2}$

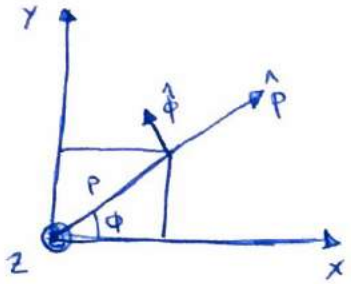
α) $B = ?$ στο εσωτερικό υποθέτοντας ότι η χρ. μεταβολή είναι σχετικά αργή

β) $E = ?$ συνάρτηση χρόνου-θέσης στο εσωτερικό

γ) Poynting στο εσωτερικό

[Έκφραση σε κυλινδρικές συντεταγμένες]

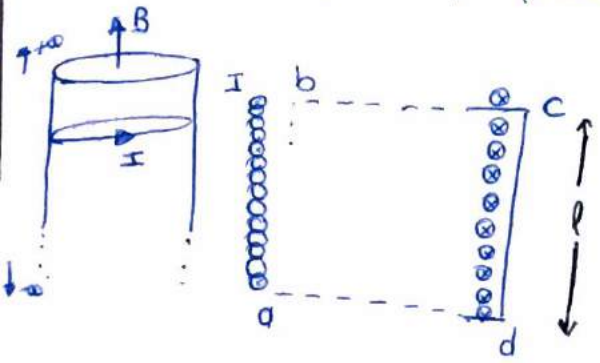
Λύση



α) Θεωρώντας ημι-στατική προσέγγιση, θεωρούμε ότι ισχύει ο κλασικός νόμος Gauss (χωρίς δηλαδή τον διορθωτικό όρο)

Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού το μαγν. πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι παράλληλο στον άξονά του (z) και ομογενές (σχεδόν) σ' όλη την έκταση της διατομής του, ενώ στο εξωτερικό του είναι μηδέν.

Επιλέγω ορθογώνιο αμπεριανό βρόχο και εφαρμόζω νόμο Ampere:



$$\oint_c B\,d\ell = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow \int_a^b B\cdot d\ell + \cancel{\int_b^c B\,d\ell} + \cancel{\int_c^d B\,d\ell} + \cancel{\int_d^a B\,d\ell} = \mu_0 I_{enc}$$

$B \perp d\ell$ — εκτός ανίου $B=0$ — $B \perp d\ell$

$$\Leftrightarrow B\cdot \ell = \mu_0 I_{enc} \xrightarrow{I_{enc} = nI\ell} \boxed{B = \mu_0 \cdot n I}$$

Επομένως, $B(t) = \mu_0 \cdot n I_0 e^{-at^2}$

β) Από εξισώσεις Maxwell έχουμε ότι $-\frac{\partial B}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{E} \Rightarrow$ ~~$\mu_0 n I_0 2at e^{-at^2} = \vec{\nabla}\times\vec{E}$~~

$$\cancel{\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{z} \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ E_\rho & \rho E_\phi & E_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{\partial \rho E_\phi}{\partial z}\right]\hat{\rho} - \left[\frac{\partial E_z}{\partial\rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial z}\right]\rho\hat{\phi} + \left[\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial\rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial\phi}\right]}$$

- $\cancel{\dfrac{\partial E_z}{\partial \phi} - \rho \dfrac{\partial E_\phi}{\partial z} = 0}$

- $\cancel{\dfrac{\partial E_z}{\partial \rho} - \dfrac{\partial E_\rho}{\partial z} = 0}$

- $\cancel{\dfrac{\partial (\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \dfrac{\partial E_\rho}{\partial \phi} = \mu_0 n I_0 \cdot 2at e^{-at^2}}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \int \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int B \, dS \Rightarrow$$

$$\oint E \, dl = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\pi r^2 \mu_0 n I_0 e^{-at^2} \right) \Leftrightarrow E \cdot 2\pi r = -2at \mu_0 \pi r^2 n I_0 e^{-at^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{E = 2at \pi r^2 \mu_0 n I_0 e^{-at^2} \hat{\phi}}$$

γ) Διάνυσμα Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \left(atrn I_0 e^{-at^2}\right) \left(\mu_0 n I_0 e^{-at^2}\right) \left(\hat{\phi} \times \hat{z}\right) = \left(\mu_0 atr\right) \left(n I_0 e^{-at^2}\right)^2 \hat{\rho}$$

Άσκηση 5

Κυκλικά πολωμένο ηλ/τικό κύμα διάδοση στο $(\vec{\rho}=0, \vec{J}=0)$

$$\vec{E}(x,y,z) = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\hat{x} - E_0 \sin(\omega t - kz)\,\hat{y}$$

$\omega = 2\pi f = 2\pi/T \qquad k = 2\pi/\lambda \qquad c = \lambda \cdot f = \lambda/T = \omega/k$

α) Μαγν. Πεδίο αγνοώντας σφτικές συνιστώσες (Βρείτε πρώτα $\partial B/\partial t$)

β) Πυκνότητες ηλεκ & μαγν. ενέργειας ανά μονάδα όγκου

γ) Για το παραπάνω ηλεκ/τικό πεδίο, υπολογίστε τη ροή ηλεκ/τικής ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου (διάνυσμα Poynting) και δο αυτή είναι ση με την πυκνότητα της ηλεκ/τικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου επί την ταχύτητα του κύματος.

Λύση

α) Εξισώσεις Maxwell έχουμε ότι: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_0\cos(\omega t - kz) & -E_0\sin(\omega t - kz) & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}\left\{E_0 \cos(\omega t - kz)\cdot(-k)\right\} - \hat{y}\left\{-E_0 \sin(\omega t - kz)(-k)\right\} + \hat{z}\,0$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = E_0 k \cos(\omega t - kz)\,\hat{x} + E_0 k \sin(\omega t - kz)\,\hat{y} + 0\,\hat{z}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial t} &= E_0 k \cos(\omega t - kz)\,\hat{x} \Rightarrow B_x = -E_0 \sin(\omega t - kz) \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} &= E_0 k \sin(\omega t - kz)\,\hat{y} \Rightarrow B_y = -E_0 \cos(\omega t - kz) \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} &= 0 \qquad \Rightarrow B_z = 0 \end{aligned}\right\} B = (-E_0 \sin(\omega t - kz)\hat{x}, -E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{y}, 0)$$

β) $P_{WE} = \dfrac{dW_E}{dV} = \dfrac{1}{2}\epsilon_0 |E|^2 \qquad P_{WB} = \dfrac{dW_B}{dV} = \dfrac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2$

$$P_{WE} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \sqrt{E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) + E_0^2 \sin^2(\omega t - kz)} = \frac{1}{2}\epsilon_0 |E_0|$$

$$P_{WB} = \frac{1}{2\mu_0}\sqrt{E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) + E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)} = \frac{1}{2\mu_0}|E_0|$$

γ) Διάνυσμα Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = -\frac{1}{\mu_0} E_0^2\,\hat{z}$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ E_x & E_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = -E_0^2\,\hat{z}$$

Άσκηση 6 (Γκαρούτσος)

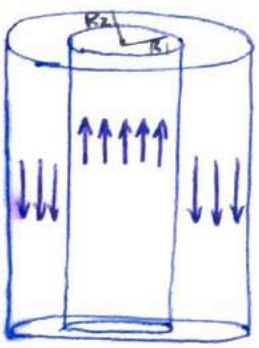
Ένα ομοαξονικό καλώδιο που αποτελείται από δυο λεπτούς (αμελητέου πάχους) κυλινδρικούς μεταλλικούς σωλήνες απείρου μήκους με ακτίνες R_1, R_2 $(R_1<R_2)$ διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα I το οποίο κατανέμεται ομοιόμορφα αλλά έχει αντίθετες κατευθύνσεις στους δυο σωλήνες

α) Υπολογίστε το μαγν. πεδίο σ' όλα τα σημεία του χώρου

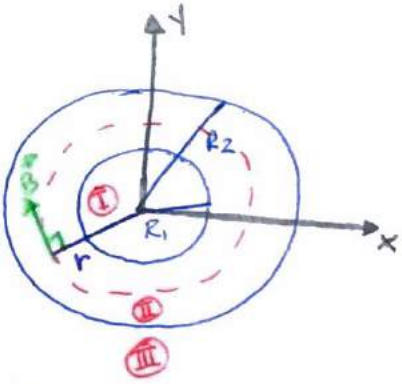
β) Υπολογίστε τη μαγν. ενέργεια ανά μονάδα μήκους του καλωδίου

γ) » την αυτεπαγωγή του καλωδίου ανά μονάδα μήκους του

Λύση



α) Λόγω απείρου μήκους του καλωδίου και της ομοιομορφής ροής των ρευμάτων, το μαγν. πεδίο $\vec{B}$ έχει τη διεύθυνση του $\hat{\phi}$ και η μαγν. ροή του B θα είναι σε περιφέρεια ακτίνας r:



• Για $r>R_2 \rightarrow I_{ence}=0$ (αφού $I-I=0$)

Από N. Ampere $\rightarrow B_{III}\cdot 2\pi r=\mu_0 0 \Rightarrow \boxed{B_{III}=0}$

• Για $R_1<r<R_2 \rightarrow I_{ence}=I \overset{NA}{\Rightarrow} B_{II}\cdot 2\pi r=\mu_0 I \Rightarrow \boxed{B_{II}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\phi}}$

• Για $r<R_1 \rightarrow J_{εσ}\cdot \pi r^2=\frac{I}{\cancel{\pi} R_1^2}\cancel{\pi}\cdot r^2=\frac{I\,r}{R_1^2} \overset{N.Ampere}{\Longrightarrow} B_I\cdot 2\pi r=\frac{\mu_0 I\cdot r^2}{R_1^2} \Rightarrow$

$$\boxed{B_I=\frac{\mu_0 I\cdot r}{2\pi R_1^2}\,\hat{\phi}}$$

β) Επόμενως, η μαγν. ενέργεια σε μήκος h θα είναι:

$$W_m=\frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2 dV=\frac{1}{2\mu_0}\int_{V_I} B_I^2\cdot dV+\frac{1}{2\mu_0}\int_{V_{II}} B_{II}^2\, dV=\frac{1}{2\mu_0}\int_{V_I}\left(\frac{\mu_0 I\cdot r}{2\pi R_1^2}\right)^2 dV+\frac{1}{2\mu_0}\int_{V_{II}}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 dV=$$

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\,dV + \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^4}\int_0^{R_1} r^2\,dV \xrightarrow{dV = 2\pi r h\,dr} W_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} h \ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{\mu_0 I^2 \cdot h}{16\pi}$$

Para $h=1 \rightarrow W_m\big|_{h=1} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$

y/ $L\big|_{h=1} = \frac{2W_m|_{h=1}}{I^2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{\mu_0}{8\pi}$

Άσκηση 7

Πυκνωτής με παράλληλους οπλισμούς κυκλικού σχήματος ακτίνας a που απέχουν μεταξύ τους απόσταση l. Έχει χωρητικότητα C και φορτίζεται με ~~ρεύμα~~ ροή ρεύματος $I(t)$ που οδηγεί σε συσσώρευση φορτίων $\pm q(t)$ στους οπλισμούς του και διαφορά δυναμικού $V(t)$ ανάμεσα στους.

Θεωρήστε ότι ηλεκ. πεδίο υπάρχει μόνο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή και είναι ομογενές (δηλ. επιφ. πυκνότητα $\sigma = \sigma(t)$ ίδια σ' όλη την έκταση).

) Ρυθμός μεταβολής ενέργειας (αποθηκευμένης στον πυκνωτή) (συναρτήσει C, V)

$J_d = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ (πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης)

εδομένου αυτού, δο $I_d(t) = C \frac{dV}{dt}$.

ησιμοποιώντας ολοκ. μορφή Ampere, υπολογίστε το μαγν. πεδίο $B(a)$ ανάμεσα ους οπλισμούς και σε ακτίνα a.

Poynting στην κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας a ανάμεσα στους οπλισμούς του κνωτή.

Δο ολική ροή ενέργειας μέσα από κυλινδ. επιφ. ακτίνας a = ρυθμός μεταβολής ενέργειας από (α

Λύση

α) Αποθηκευμένη στον πυκνωτή ενέργεια → $W = \frac{1}{2} C V^2$

Ρυθμός μεταβολής ενέργειας → $\frac{dW}{dt} = CV \frac{dV}{dt}$

β) Ανάμεσα στους οπλισμούς διαφορά δυναμικού V και ομογενές ηλεκ. πεδίο E.

Επομένως $E = \frac{V}{\ell}$

Πυκνότητα ρεύματος $J_d(t) = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = \frac{\varepsilon_0}{\ell} \frac{dV}{dt}$

Ολικό ρεύμα μετατόπισης μέσα από ολόκληρη επιφάνεια οπλισμών →

$I_d(t) = \pi a^2 J_d(t) = \varepsilon_0 \frac{\pi a^2}{\ell} \frac{dV}{dt}$ $\quad I_d(t) = C \frac{dV}{dt}$

Νόμος Ampere → $\oint \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I_d$ για κύκλο ακτίνας a

$2\pi a B(a) = \mu_0 C \frac{dV}{dt}$ → $B(a) = \frac{\mu_0 C}{2\pi a} \frac{dV}{dt}$

γ) Πεδίο $\vec{E}$ και $\vec{B}$ κάθετα μεταξύ τους.

Το διάνυσμα Poynting είναι κάθετο και στα δύο και στην κυλινδρική επιφάνεια των οπλισμών.

Μέτρο S → $S = \frac{1}{\mu_0} E B(a) = \frac{V}{\ell} \frac{C}{2\pi a} \frac{dV}{dt}$ $\quad S = \frac{C}{2\pi a \ell} V \frac{dV}{dt}$

δ) Ολική ενέργεια μέσα από κυλινδρική επιφάνεια ανάμεσα σε οπλισμούς

$2\pi a \ell S = CV \frac{dV}{dt}$ ή $2\pi a \ell S = \frac{dW}{dt}$

Άσκηση 8

Συμπαγής κυλινδρικός αγωγός ακτίνας a εκτείνεται στο άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις. Ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα I, ομοιόμορφα κατανεμημένο στη διατομή του. Στην επιφάνεια του κυλίνδρου ∃ πολύ λεπτό στρώμα αγώγιμου υλικού, μονωμένο από τον κυλινδρικό αγωγό με μονωτικό υλικό αμελητέου πάχους. Το εξωτερικό αγώγιμο στρώμα φέρει συνολικό ρεύμα I σε κατεύθυνση αντίθετη από εκείνη του συμπαγούς κυλινδρικού αγωγού ομοιόμορφα κατανεμημένο στο αγώγιμο στρώμα.

α) $B = ?$ σε κάθε σημείο του χώρου

β) $W_B = ?$ σε μήκος ℓ του συστήματος

γ) $W_B = \frac{1}{2} L I^2 \rightarrow L = ?$ και $\frac{L}{\ell} = ?$

Λύση

α) Θεωρούμε ότι το μήκος ℓ του ομοαξονικού καλωδίου είναι πολύ μεγαλύτερο από τις ακτίνες του → απειρο μήκος → κυλινδρική συμμετρία → δυναμικές γραμμές κλειστές καμπύλες με κυλινδρική συμμετρία δηλ. κύκλοι ⊥ άξονα συμμετρίας.

Νόμος Ampere με κλειστή καμπύλη μια κυκλική δυναμική γραμμή ακτίνας $r < a$

$$2\pi r B = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 I \cdot r}{2\pi a^2}$$

$B = 0$ οπουδήποτε αλλού

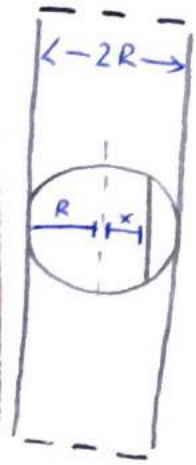
β) $$W_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^a \left(\frac{\mu_0 I \cdot r}{2\pi a^2}\right)^2 (2\pi r \ell dr) = \frac{\mu_0 I^2 a^2}{16\pi} \ell$$

γ)

$$W_B = \frac{1}{2} L I^2 \rightarrow L = \frac{2W_B}{I^2} = \frac{\mu_0 a^2}{8\pi} \ell \rightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0 a^2}{8\pi}$$

Άσκηση 9

Βρείτε τον συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής μεταξύ του συστήματος δύο ευθ. παραλλήλων αγωγών πολύ μεγάλου μήκους που βρίσκονται σε απόσταση 2R μεταξύ τους και αποτελούν κύκλωμα σχήματος ορθογ. παραλληλόγραμμου, και ενός αγώγιμου δακτυλίου ακτίνας R που βρίσκεται στο επίπεδο των // αγωγών ανάμεσα τους και σε ίση απόσταση από τα άκρα τους (πολύ μεγαλύτερη από 2R)



Λύση Υπολογίζουμε τη μαγν. ροή ολοκληρώνοντας σε λωρίδες εύρους dx.

$$d\Phi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R+x)}\, 2\sqrt{R^2-x^2}\, dx + \frac{\mu_0 I}{2\pi(R-x)}\, 2\sqrt{R^2-x^2}\, dx = \frac{\mu_0 I}{\pi}\left[\frac{2R}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]$$

$$\Phi_B = \int_{-R}^{R} \frac{\mu_0 I}{\pi}\left[\frac{2R}{\sqrt{R^2-x^2}}\right] dx = \ldots = 2\mu_0 I \cdot R$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = 2\mu_0 R$$

Άσκηση 10

Καλώδιο αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλινδρικούς μεταλλικούς φλοιούς μεγάλου μήκους (ℓ) με αμελητέο πάχος και με ακτίνες R_1 και $R_2 > R_1$ ($R_1, R_2 << \ell$)

α) Υποθέτοντας ότι οι δύο φλοιοί βρίσκονται σε μια σταθερή διαφορά δυναμικού υπολογίστε το $C_0 = \frac{C}{\ell}$.

β) Υποθέτοντας ότι οι δύο φλοιοί διαρρέονται από ίσα I αντίθετα ρεύματα υπολογίστε $L_0 = \frac{L}{\ell}$

γ) Το $L_0 C_0$ δεν εξαρτάται από γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Με ποιά ποσότητα σχετίζεται; → $C_0 L_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{\mu_0}{2\pi r} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ → αντίστροφο τετράγωνου ταχύτητας φωτός

Λύση

α) Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας → $(2\pi r \ell) E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r \ell} \Rightarrow$

$$|\Delta V| = \int_{R_1}^{R_2} E\,dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \Rightarrow C_0 = \frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

β) Μαγν. πεδίο κυλινδρικής συμμετρίας → δυν. γραμμές κύκλους ομοαξονικούς με σύστημα.

Ν. Ampère:

$$\oint_C B(r d\phi) = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Ροή μαγν. πεδίου → $\Phi_B = \int_{R_1}^{R_2} B\,(\ell dr) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \ell \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \Rightarrow L_0 = \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Άσκηση 11

Δυο ομοαξονικά πηνία (κοινός άξονας ο άξονας z) έχουν ακτίνες R_1 και $R_2 > R_1$ και εκτείνονται από $z=0$ έως $z=l$ $l >> R_2$.

Εσωτερικό πηνίο συνολικά N_1 σπείρες ενώ εξωτερικό N_2 σπείρες

α) $L_1, L_2 = ?$ και $M_{12} = M_{21} = M = ?$

β) Συνδέουμε τα δυο πηνία με την εξής γεωμετρία: αρχίζουμε την περιέλιξη του εξωτερικού πηνίου από το επίπεδο $z=l$ κατά μήκος της καμπύλης ΑΒΓΔΕΖ και με επάλληλες πλήρεις σπείρες της μορφής ΒΓΔΕΖ κατεβαίνουμε μέχρι το επίπεδο $z=0$, εκεί διαγράφουμε την καμπύλη ΖΗΘΙΚΛ και με επάλληλες σπείρες της μορφής ΗΘΙΚΛ ανεβαίνουμε ξανά μέχρι το επίπεδο $z=l$ και τελειώνουμε με την γραμμή ΛΜ

Να υπολογιστεί ο L_B του κυκλώματος

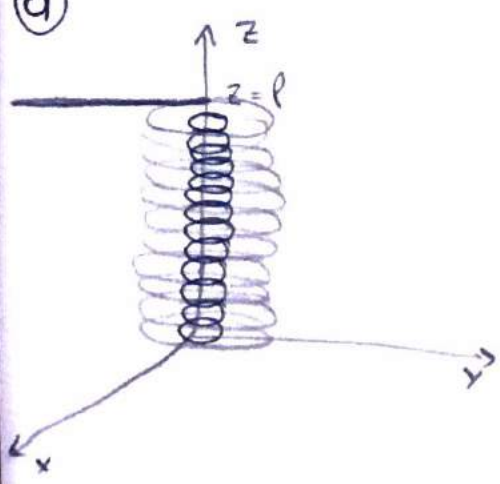
γ) Συνδέουμε τα δυο πηνία με την εξής γεωμετρία: αρχίζουμε την περιέλιξη του εξωτερικού πηνίου από το επίπεδο $z=l$ κατά μήκος της καμπύλης ΑΒΓΔΕΖ και με επάλληλες πλήρεις σπείρες της μορφής ΒΓΔΕΖ κατεβαίνουμε μέχρι το επίπεδο $z=0$ εκεί διαγράφουμε την καμπύλη ΖΛΚΙΘΗ και με επάλληλες σπείρες της μορφής ΛΚΙΘΗ ανεβαίνουμε ξανά μέχρι το επίπεδο $z=l$ και τελειώνουμε με την γραμμή ΗΜ.

$L_\gamma = ?$

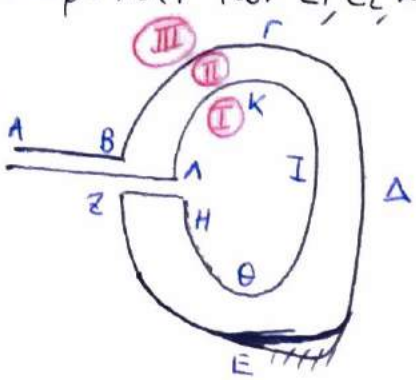
δ) Έκφραση των L_B, L_γ συνάρτηση των L_1, L_2, M.

Σχήματα

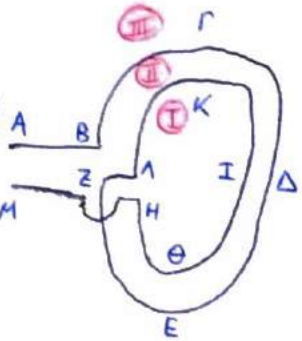
α)



β)



γ)



Λύση.

α) $\Phi_1 = L_1 I_1$

$\Phi_1 = N_1 \cdot \Phi_{1\text{-ολερ}} = N_1 (\mu_0 n_1 I_1)(\pi R_1^2) = \mu_0 \pi R_1^2 \cdot n_1^2 l I_1$

$L_1 = \mu_0 \pi R_1^2 n_1^2 l \rightarrow \frac{L_1}{l} = \mu_0 \pi R_1^2 n_1^2$

Όμοια $\frac{L_2}{l} = \mu_0 \pi R_2^2 n_2^2$

Αντίστοιχα $\Phi_2 = M_{21} I_1$

$\Phi_2 = N_2 \cdot \Phi_{1\text{-ολερ}} = N_2 (\mu_0 n_1 I_1)(\pi R_1^2) = \mu_0 \pi R_1^2 n_1 n_2 l I_1$

$M_{21} = \mu_0 \pi R_1^2 n_1 n_2 l \rightarrow \frac{M_{21}}{l} = \mu_0 \pi R_1^2 n_1 n_2 = \frac{M_{12}}{l}$

β) Υποθέτουμε ότι διαρρέεται από ρεύμα I

$B_I = \mu_0 (n_1 - n_2) I \qquad B_{II} = \mu_0 n_2 I \qquad B_{III} = 0$

$W_B = \frac{1}{2} \mu_0 \pi I \left[n_1^2 R_1^2 + n_2^2 R_2^2 - 2 n_1 n_2 R_1^2 \right] I^2 = \frac{1}{2} L I^2 \rightarrow L = \mu_0 \pi l \left[n_1^2 R_1^2 + n_2^2 R_2^2 - 2 n_1 n_2 R_1^2 \right]$

γ) Αν υποθέσουμε ότι διαρρέεται από ρεύμα I →

$B_I = \mu_0 (n_1 + n_2) I \qquad B_{II} = \mu_0 (n_2) I \qquad B_{III} = 0$

$W_B = \frac{1}{2\mu_0} \left[|B_I|^2 V_I + |B_{II}|^2 \cdot V_{II} \right] = \frac{1}{2\mu_0} \left[\mu_0 (n_1 + n_2) I)^2 (\pi R_1^2 l) + (\mu_0 (n_2) I)^2 \pi (R_2^3 - R_1^2) l \right]$

Όμως $W_B = \frac{1}{2} L I^2$

Μετά από πράξεις $L = \mu_0 \pi I \left[n_1^2 R_1^2 + n_2^2 R_2^2 + 2 n_1 n_2 R_1^2 \right]$

δ) $L_\beta = L_1 + L_1 - 2M_{12}$

$L_\gamma = L_1 + L_1 + 2M_{12}$

Άσκηση 12

Δυο παράλληλοι ευθύγραμμοι λεπτοί αγωγοί εκτείνονται στο άπειρο και προς τις δυο κατευθύνσεις και διαρρέονται από ίσα ρεύματα με αντίθετες κατευθύνσεις. Οι αγωγοί απέχουν απόσταση 3a ο ένας από τον άλλον. Συμμετρικά ανάμεσα στους αγωγούς και στο επίπεδό τους βρίσκεται αγώγιμος βρόχος σχήματος τετραγώνου πλευράς a. Οι δυο πλευρές του τετραγώνου // προς τους δυο αγωγούς. Βρείτε συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής του βρόχου και των δυο αγωγών

Λύση

Συνολική ροή από το τετράγωνο πλευράς a → $\Phi_{ολ} = \int_{x=a}^{x=2a} B_{ολ} \cdot dS$ όπου $dS = a\,dx$

x: απόσταση από τον ένα αγωγό

3x−a απόσταση από τον άλλο αγωγό

(Γραμμικά λόγω συμμετρίας $\Phi_{ολ} = 2\Phi_1$)

$$\Phi_{ολ} = \int_{x=a}^{x=2a} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(3a-x)} \right) a\,dx \rightarrow \Phi_{ολ} = \frac{\mu_0}{\pi} a \ln 2$$

$$L = \frac{\Phi_{ολ}}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} a \ln 2$$

Άσκηση 13 (*)

Ζωλινοειδές πηνίο με άξονα τον z και ακτίνα R με $l >> R$ και n σπείρες ανά μονάδα μήκους, διαρ. από ρεύμα I (κατά τη φορά του $\hat{\theta}$) το οποίο αυξάνεται με ρυθμό $\frac{dI}{dt} = k = \text{σταθ} > 0$

α) B = ? εσωτερικά (Ημιστατική προσέγγιση)

β) Γιατί οι δυναμικές γραμμές του επαγόμενου ηλεκ. πεδίου είναι κύκλοι?

E = ? εσωτερικά του πηνίου (κυλινδρικές συντεταγμένες) (απόσταση r από άξονα)

γ) Poynting εσωτερικά του πηνίου σε απόσταση r από τον άξονα

Λύση

α) $\vec{B} = \mu_0 n I(t)\, \hat{z}$

β) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu_0 n \dot{I}(t) \cdot \hat{z}$ → Δυναμικές γραμμές του E : κύκλοι.

$\int \vec{\nabla} \times \vec{E}\, dS = -\int \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) dS = -\mu_0 n \dot{I}(t) \int \hat{z}\, dS$

Από Stokes → $\int (\vec{\nabla} \times \vec{E})\, dS = \int \vec{E}\, d\vec{l}$

Άρα $\int \vec{E}\, d\vec{l} = -\mu_0 n \dot{I}(t) \int \hat{z}\, dS$ → $2\pi r E = -\mu_0 n \dot{I}(t)\, \pi r^2$ → $\boxed{E = -\frac{\mu_0 n r \dot{I}(t)}{2}\, \hat{\theta}}$

γ) $\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = -\frac{1}{2} \mu_0 n^2 I \cdot \dot{I}\, r\, \hat{r}}$