ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
"Μαθηματική Ανάλυση Ι": Ασκήσεις στην παράγωγο συναρτήσεων μιας μεταβλητής

ακαδ. έτος 2011–12

1. (**Θεώρημα Darboux**) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(a) \neq f'(b)$. Τότε, για κάθε c μεταξύ $f'(a)$ και $f'(b)$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi) = c\,.$$
Ζητείται η απόδειξη αυτού του κλασικού θεωρήματος ακολουθώντας τα εξής βήματα (*η προτεινόμενη απόδειξη δεν είναι τόσο γνωστή στη βιβλιογραφία*): Θεωρείστε πρώτα τις συνεχείς συναρτήσεις $f_a, f_b : [a,b] \to \mathbb{R}$ με
$$f_a(x) = \begin{cases} f'(a) & \text{αν } x = a \\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{αν } x \neq a \end{cases} \quad \text{και} \quad f_b(x) = \begin{cases} f'(b) & \text{αν } x = b \\ \frac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{αν } x \neq b\,. \end{cases}$$
Τότε,
$$f_a(a) = f'(a),\ f_a(b) = f_b(a) \text{ και } f_b(b) = f'(b).$$
Στη συνέχεια χρησιμοποιείστε το θεώρημα Bolzano ή ενδιάμεσης τιμής και το θεώρημα μέσης τιμής.

2. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0,2]$, παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και τέτοια ώστε $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$.
   (α′) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = 1$.
   (β′) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi_2 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = 0$.
   (γ′) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2/3$.

3. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b), με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [a,b]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε
$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}\,.$$
<u>*Υπόδειξη*</u>. Η $g(x) := \ln|f(x)|$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b).

4. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b). Αν
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$$
και
$$f'(x) + f^2(x) + 1 \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in (a,b),$$
να αποδειχθεί ότι $b - a \geq \pi$.
<u>*Υπόδειξη*</u>. Εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής για τη συνάρτηση $y = \arctan f(x)$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με $a < x_1 < x_2 < b$.

5. Να βρεθούν όλες οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο $(0,\infty)$ τέτοιες ώστε
$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x} \text{ και } g'(x) = -\frac{f(x)}{x}, \text{ για κάθε } x > 0.$$
<u>*Υπόδειξη*</u>. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι
$$[x(f(x) + g(x))]' \text{ και } \left[\frac{f(x) - g(x)}{x}\right]', \text{ για κάθε } x > 0.$$

6. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad \text{για κάθε } x, y \in (0,1).$$

Να αποδειχθεί ότι

$$|f'(x)| \leq M, \quad \text{για κάθε } x \in (0,1).$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Έστω $x \in (0,1)$. Για $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ με $x + h \in (0,1)$ είναι

$$|f'(x)| = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right|.$$

7. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x, t \in \mathbb{R}$ είναι

$$|f(x) - f(t)| \leq |x - t|^{1+\alpha}, \quad \text{όπου } \alpha > 0.$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή.

8. Υποθέτουμε ότι οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τέτοιες ώστε

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = e^{f(x) - g(x)}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν $f(0) = g(2011) = 1$, να βρεθεί η μεγαλύτερη σταθερά c τέτοια ώστε $f(2011) > c$.
<u>*Υπόδειξη*</u>.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = e^{f(x) - g(x)} \iff \left(e^{-f(x)}\right)' = \left(e^{-g(x)}\right)'.$$

9. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) \geq M > 0 \text{ για κάθε } x \in [0,1].$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει κλειστό υποδιάστημα J του $[0,1]$ με μήκος $\ell(J) = 1/4$, τέτοιο ώστε

$$|f(x)| \geq \frac{M}{4} \text{ για κάθε } x \in J.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Να διακρίνετε τις περιπτώσεις (i) $f(1/2) \geq 0$ και (ii) $f(1/2) \leq 0$.

10. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos x^{n+1}}{\arccos x^n}$$

και στη συνέχεια αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos x^n}{\arccos x} = \sqrt{n}.$$

Η παράδοση των ασκήσεων είναι προαιρετική.