ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη "Μαθηματική Ανάλυση Ι"

ακαδ. έτος 2011–12

1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου συνάρτησης, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x-2}{x^2+2}=\frac{1}{3}\,.$$

Δηλαδή για κάθε $\varepsilon>0$ να βρεθεί $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $0<|x-1|<\delta$ να ισχύει

$$\left|\frac{x^3+2x-2}{x^2+2}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon\,.$$

2. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f:(-a,a)\setminus\{0\}\to(0,\infty)$ είναι τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)=2\,.$$

Αποδείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to a}f(x)$ υπάρχει και ισούται με 1.

3. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4 & \text{αν } x \text{ άρρητος}\\ 0 & \text{αν } x \text{ ρητός}\,.\end{cases}$$

Να βρεθούν όλα τα σημεία του $\mathbb{R}$ στα οποία η f είναι συνεχής.

4. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$|f(x)-f(y)|\geq a|x-y| \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}\,,$$

όπου $a>0$. Αποδείξτε ότι η f είναι $1-1$ και επί.
<u>*Υπόδειξη*</u>. Είναι $|f(x)-f(0)|\geq a|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\text{είτε } \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty \text{ ή } \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\,.$$

5. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{|x|} & \text{αν } x\neq 0\,,\\ \frac{\pi}{2} & \text{αν } x=0\,,\end{cases}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

6. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=0$. Αν $n\in\mathbb{N}$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(f(x)+f\left(\frac{x}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{x}{n}\right)\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)f'(0)\,.$$

7. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $y=f(x)=\arcsin x+2\arccos x$ είναι γνήσια μονότονη στο διάστημα $(-1,1)$. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη της f, υπολογίστε το όριο

$$\lim_{y\to\pi}\frac{f^{-1}(y)}{y-\pi}\,.$$

8. (**Ανισότητα Kolmogorov**) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και f''' είναι φραγμένες με

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = M_0 \text{ και } \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'''(x)| = M_3 .$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor αποδείξτε ότι η f' είναι φραγμένη με

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \frac{1}{2}\sqrt[3]{9M_0^2 M_3} .$$

9. Αν $f(x) = x\sin x^2$, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της $y = \sin x^2$ σε δυναμοσειρά να υπολογιστεί η παράγωγος $f^{(15)}(0)$.

*10. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη.

(α′) Αν

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + f'(x)) = 0 ,$$

τότε το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχει και ισούται με το μηδέν.
Για την απόδειξη χρησιμοποιείστε τα παρακάτω βήματα:

(i) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$,

$$\text{υπάρχει } A > 0 \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } x > A \text{ είναι } |f(x) + f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

(ii) Έστω $x > A$. Αν $g(x) := e^x f(x)$, χρησιμοποιώντας το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής (θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy) για τις συναρτήσεις $y = g(x)$ και $y = e^x$ αποδείξτε ότι

$$|g(x) - g(A)| < \frac{\varepsilon}{2}\left|e^x - e^A\right| .$$

(iii) Να συμπεράνετε ότι για κάθε $x > A$ είναι

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|f(A)e^{A-x}\right|$$

(iv) Αποδείξτε ότι υπάρχει $B > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > B$ είναι

$$\left|f(A)e^{A-x}\right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Αν $\Delta = \max\{A, B\}$, τότε για κάθε $x > \Delta$ είναι $|f(x)| < \varepsilon$.

(β′) Αν

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + f'(x)) = 1 ,$$

τότε $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Παράδοση των ασκήσεων έως 2/3/2012