ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΕΜΠ

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ – ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2007

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες
Γράψτε και τα 3 θέματα

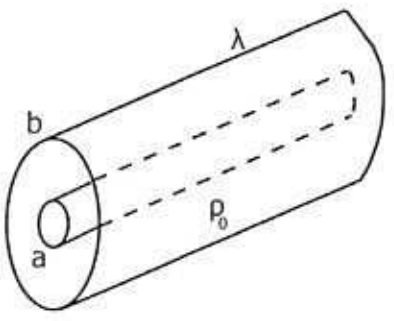
Κ. Αναγνωστόπουλος
Ν. Τράκας

ΘΕΜΑ 1. Ο χώρος που περικλείεται μεταξύ δύο ομοαξονικών κυλίνδρων ακτίνας βάσης a και b (και απείρου μήκους)περιέχει φορτίο με σταθερή (χωρική) πυκνότητα ρ_0. Στην εξωτερική κυλινδρική επιφάνεια υπάρχει επιφανειακό φορτίο με σταθερή πυκνότητα, ανά μονάδα μήκους, $\lambda = -\pi\rho_0(b^2 - a^2)$ (βλ. σχήμα 1). Βρείτε α) το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο και β) τη συνολική ηλεκτροστατική ενέργεια (ανά μονάδα μήκους) της κατανομής.

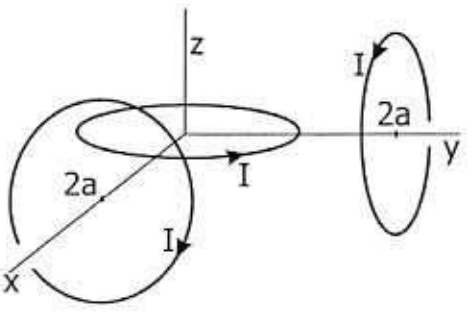
ΘΕΜΑ 2. α) Τρεις όμοιοι αγώγιμοι κυκλικοί δακτύλιοι ακτίνας α διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I και τοποθετούνται ο πρώτος κάθετος στον άξονα z με κέντρο στο σημείο (0,0,0), ο δεύτερος κάθετος στον άξονα x με κέντρο στο (2α,0,0) και ο τρίτος κάθετος στον άξονα y με κέντρο στο (0,2α,0) (βλ. σχήμα 2). Βρείτε το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου στο σημείο (0,0,0).
β) Αν σε μια περιοχή του χώρου υπάρχει σταθερή πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J}$ (ενώ δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο), δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\mu_0\,\mathbf{J}\times\mathbf{r}$$

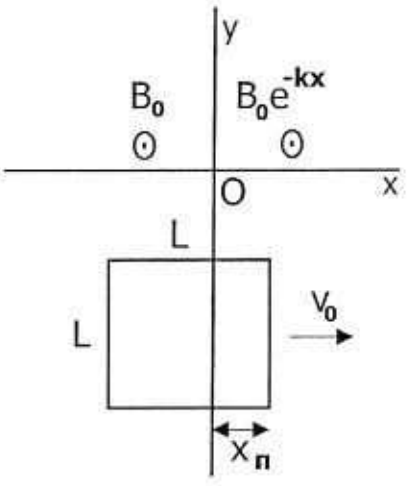
ΘΕΜΑ 3. Στον ημίχωρο $x < 0$ υπάρχει σταθερό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$, ενώ για $x > 0$ το μαγνητικό πεδίο είναι $\mathbf{B} = B_0\,\mathrm{e}^{-kx}\hat{\mathbf{z}}$. Τετραγωνικό πλαίσιο πλευράς L κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = v_0\hat{\mathbf{x}}$. Βρείτε την αναπτυσσόμενη στο πλαίσιο ηλεκτρεγερτική δύναμη, ως συνάρτηση του χρόνου, αν $x_\Pi(t=0) = -L$, και έως ότου $x_\Pi = 2L$. Να γίνει γραφική παράσταση της ΗΕΔ συναρτήσει του χρόνου.



Σχ.1

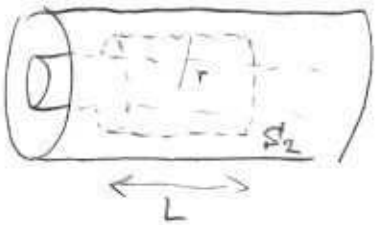


Σχ.2



Σχ.3

Θεμα 1



α) $\underline{r<a}$ $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow$

$$E \cdot 2\pi r L = 0 \Rightarrow E = 0$$

$\underline{a<r<b}$ $\oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho_0 \cdot dV = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\underbrace{(\pi r^2 - \pi a^2)\cdot L}_{V}$

$$\oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{a} = E \cdot 2\pi r L$$

$$\Rightarrow E \cdot 2\cancel{\pi} r \cancel{L} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\cancel{\pi}(r^2-a^2)\cdot \cancel{L} = \frac{\rho_0 r^2}{\epsilon_0}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right)$$

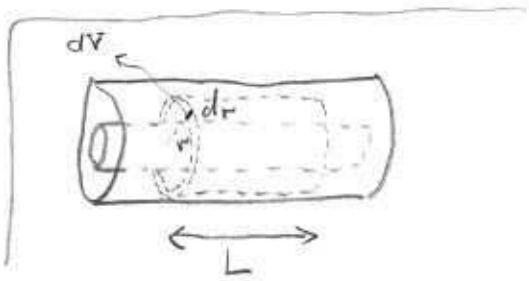
$$\Rightarrow E = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right)$$

$\underline{r>b}$ $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{ol}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\lambda L + \int_V \rho\, dV\right) \Rightarrow$

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\pi\rho_0(a^2-b^2) + \rho_0\pi(b^2-a^2)\right)L = \frac{1}{\epsilon_0}\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow E = 0$$

Άρα:
$$E = \begin{cases} 0 & r<a \\ \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right) & a<r<b \\ 0 & r>b \end{cases}$$



---

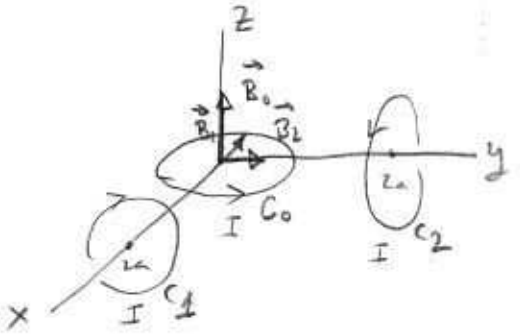
b) $E = \int_V u\, dV = \int_V \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_a^b \frac{\rho_0^2 r^2}{4\epsilon_0^2}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^2 \underbrace{(2\pi r)\cdot dr \cdot L}_{dV}$

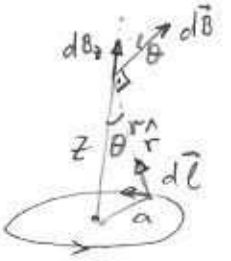
$$\Rightarrow E = \frac{E}{L} = \frac{\pi\rho_0^2}{4\epsilon_0}\int_a^b r^3\left\{1 - 2\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^4\right\}dr$$

$$= \frac{\pi\rho_0^2}{4\epsilon_0}\int_a^b \left\{r^3 - 2a^2 r + \frac{a^4}{r}\right\}dr = \frac{\pi\rho_0^2}{4\epsilon_0}\left(\frac{r^4}{4} - 2a^2\frac{r^2}{2} + a^4 \ln r\right)\Big|_a^b$$

$$= \frac{\pi\rho_0}{4\epsilon_0}\left(\frac{b^4}{4} - a^2b^2 + \frac{3a^4}{4} + a^4 \ln\frac{b}{a}\right)$$

Θέμα 2





$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2} \quad \text{Biot Savart.}$$

Μόνο πεδίο στον άξονα κυκλικού ρεύματος κατα z-συνιστώσα: $dB_z = dB\cdot\sin\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}\sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{a}{r}$$

$$B = B_z = \oint dB_z = \oint \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}\cdot\frac{a}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{r^3}\oint dl = \frac{\mu_0 I}{\cancel{4\pi}_{2}}\frac{a}{r^3}\cdot\cancel{2\pi}a$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$$

Συνισταμένη C0 $\quad \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I a^2}{2(0+a^2)^{3/2}}\hat{z} = \frac{\mu_0 I a^2}{2a^3}\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2a}\hat{z}$

Συνιστώσα C1 $\quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I a^2}{2(4a^2+a^2)^{3/2}}(-\hat{x}) = \frac{-\mu_0 I a^2}{2\cdot 5^{3/2}a^3} = -5^{-3/2}\frac{\mu_0 I}{2a}\hat{x}$

Συνιστώσα C2: $\quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I a^2}{2(4a^2+a^2)^{3/2}}\hat{y} = 5^{-3/2}\frac{\mu_0 I}{2a}\hat{y}$

Άρα $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2a}\left(-5^{-3/2}\hat{x} + 5^{-3/2}\hat{y} + \hat{z}\right)$

Μέτρο $\vec{B}$:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a}\left(\left(5^{-3/2}\right)^2 + \left(5^{-3/2}\right)^2 + 1^2\right)^{1/2} = \frac{\mu_0 I}{2a}\frac{3\sqrt{3}}{5}$$

β) Αρχή Δίκη

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\int \vec{j}\cdot d\vec{a}$

$B\,2\pi R = \mu_0 j\pi R^2$

$B = \frac{\mu_0}{2} j R \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\vec{j}\times\vec{r}$

~~(Μόνο κυλινδρικής συμμετρίας ρεύματος παράλληλο στον άξονα z)~~

Χωρίς βλάβη γενικότητας $\vec{J} = J\hat{x}$ οπότε $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$

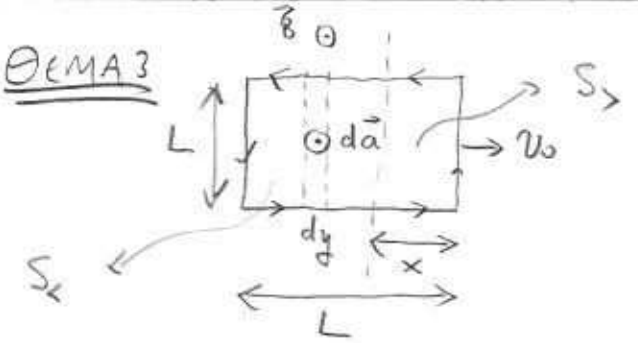
$B_x = \frac{\mu_0}{2}(\cancel{J_y z} - \cancel{J_z y}) = 0 \quad B_y = \frac{\mu_0}{2}(\cancel{J_z x} - J_x z) = -\frac{\mu_0}{2}Jz$

$B_z = \frac{\mu_0}{2}(J_x y - \cancel{J_y x}) = \frac{\mu_0}{2}Jy$

$(\vec{\nabla}\times\vec{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\mu_0}{2}J - \left(-\frac{\mu_0 J}{2}\right) = \mu_0 J, \quad (\vec{\nabla}\times\vec{B})_y = \dots = 0, \quad (\vec{\nabla}\times\vec{B})_z = \dots = 0$

Άρα $(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0\vec{J}$ οπότε $\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0\vec{J}\times\vec{r}$ Δίκη Α. Ampère

ΘΕΜΑ 3



$$\left(\begin{array}{l} x = x(t=0) + v_0 t = -L + v_0 t \\ x = 2L \Rightarrow -L + v_0 t = 2L \Rightarrow t = \frac{3L}{v_0} \end{array} \right)$$

(α) $\underline{0 < x < L}$

$$\Phi = \Phi_< + \Phi_>$$

$$\Phi_< = \int_{S_<} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_{S_<} B_0 \cdot da = B_0 \int_{S_<} da = B_0 (L - x) L$$

$$\Phi_> = \int_{S_>} \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_0^x B_0 e^{-ky} \cdot dy \cdot L = B_0 L \left(-\frac{1}{k} e^{-ky} \right) \Big|_0^x = \frac{B_0 L}{k} \left(1 - e^{-kx} \right)$$

$$\Phi = \Phi_> + \Phi_< = B_0 (L - x) L + \frac{B_0 L}{k} \left(1 - e^{-kx} \right)$$

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\left\{ B_0 \left(0 - \frac{dx}{dt} \right) L + \frac{B_0 L}{k} \left(0 - \left(-e^{-kx} \right) \cdot k \frac{dx}{dt} \right) \right\} \overset{v_0 = \frac{dx}{dt}}{=}$$

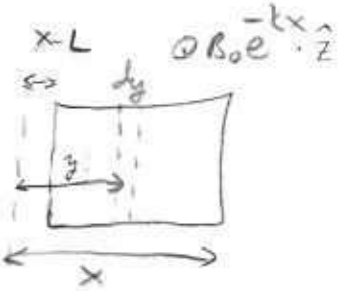
$$= B_0 L v_0 - \frac{B_0 L}{\cancel{k}} \cdot \cancel{k} v_0 e^{-kx} = B_0 L v_0 \left(1 - e^{-kx} \right)$$

$$= B_0 L v \left(1 - e^{-k(v_0 t - L)} \right)$$

(β) $\underline{x < 0}$ $\quad \Phi = B_0 \cdot L^2 = \text{σταθ.} \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$

(γ) $\underline{\underline{x > L}}$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_{x-L}^{x} B_0 e^{-ky} dy L$$



$$= B_0 L \left(-\frac{1}{k} e^{-ky} \right) \Big|_{x-L}^{x}$$

$$= \frac{B_0 L}{k} \left(e^{-k(x-L)} - e^{-kx} \right)$$

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0 L}{\cancel{k}} \left\{ -\cancel{k} e^{-k(x-L)} \cdot \frac{dx}{dt} - (-\cancel{k}) e^{-kx} \frac{dx}{dt} \right) = B_0 L v_0 \left(e^{-k(x-L)} - e^{-kx} \right)$$

$$= B_0 L v_0 \left(e^{kL} - 1 \right) e^{-kx}$$