Λύσεις Θεμάτων Επιχειρησιακής Έρευνας
$7^{ου}$ Εξαμήνου
Εξεταστική Φεβρουαρίου 2006

Λύση $1^{ου}$ Θέματος

Ερώτημα 1 :

Βιταμίνες	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
B_1	3	2	0	3	1	≥ 30
B_2	1	4	2	9	1	≥ 27
B_3	4	6	6	7	5	≥ 33
Κόστος	10	8	9	18	7	

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 τα γραμμάρια τροφής ανά ημέρα .

Αντικειμενική συνάρτηση : min C = $10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 18x_4 + 7x_5$

Υπό τους περιορισμούς :

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 \quad\quad + 3x_4 + x_5 &\geq 30 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 9x_4 + x_5 &\geq 27 \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 &\geq 33 \end{aligned}\right\} \textbf{περιορισμοί ελάχιστης ποσότητας βιταμινών}$$

$$\left. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \right\} \textbf{περιορισμοί μη αρνητικότητας}$$

Ερώτημα 2 (Δυϊκό):

Έστω w_1, w_2, w_3 η τιμή πώλησης ανά μονάδα βιταμίνης.

Αντικειμενική συνάρτηση : max P = $30w_1 + 27w_2 + 33w_3$

Περιορισμοί :

$$\begin{aligned} 3w_1 + w_2 + 4w_3 &\leq 10 \\ 2w_1 + 4w_2 + 6w_3 &\leq 8 \\ 2w_2 + 6w_3 &\leq 9 \\ 3w_1 + 9w_2 + 7w_3 &\leq 18 \\ w_1 + w_2 + 5w_3 &\leq 7 \\ w_1, w_2, w_3 &\geq 10 \end{aligned}$$

Λύση $2^{ου}$ Θέματος :

Ερώτημα 1:

	Προϊόν Α	Προϊόν Β	
Ανθρωποώρες	3	1	≤ 30
Πωλήσεις	1		≤ 8
		1	≤ 12
Κέρδος	30	30	

Έστω x,y οι χιλιάδες μονάδων προϊόντος Α και προϊόντος Β αντίστοιχα, που θα παραχθούν.

Αντικειμενική συνάρτηση (μέγιστο κέρδος) : max P = 30x+ 30y (σε χιλιάδες €)

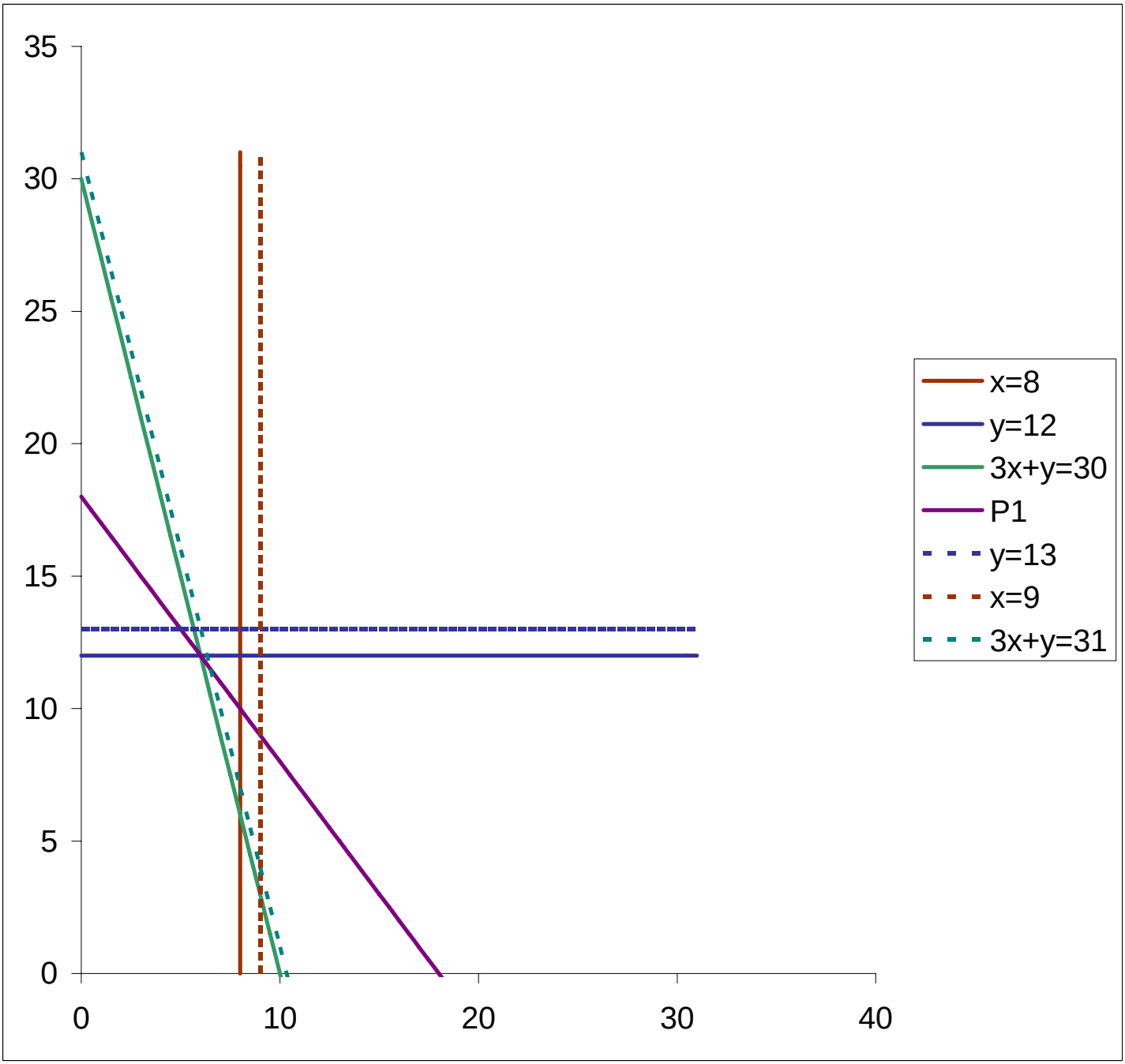
Υπό τους **περιορισμούς** :

$3x + y \leq 30$ **:** διαθέσιμες ανθρωποώρες

$x \leq 8$ **:** διάθεση προϊόντος Α

$y \leq 12$ **:** διάθεση προϊόντος Β

$x, y \geq 0$ **:** μη αρνητικότητας



$3x + y \leq 30$

Για $(x, y) = (0, 0)$, έχω $3*0+0 \leq 30$ δεκτό.

$$\left.\begin{array}{r} y = 12 \\ 3x + y = 30 \end{array}\right\} 3x + 12 = 30 \Rightarrow x = 6$$

Άρα έχω το B(6, 12)

$$\left.\begin{array}{r} x = 8 \\ 3x + y = 30 \end{array}\right\} 3*8 + y = 30 \Rightarrow y = 6$$

Άρα έχω το C(8, 6)

Έστω P = 60 : 30x + 30y = 60
P(0) = P(0, 0) = 0
P(A) = P(0, 12) = 360
P(B) = P(6, 12) = 540 max
P(C) = P(8, 6) = 420
P(D) = P(8, 0) = 240

Έχω λοιπόν maxP = 540 όταν x = 6 χιλιάδες A & y = 12 χιλιάδες B.

<u>Ερώτημα 2 :</u>

Ο περιορισμός $x \leq 8$ είναι μη ενεργός όταν φύγει και αντικατασταθεί από τον περιορισμό $x \leq 9$. Η λύση και το κέρδος δεν αλλάζουν. Η σκιώδης τιμή σ'αυτόν τον περιορισμό **όπως και σε κάθε άλλον μη ενεργό** περιορισμό, είναι **μηδέν.**

« Η νέα αποδεκτή λύση είναι η OABC'D' .

$$\left.\begin{array}{r} x = 9 \\ 3x + y = 30 \end{array}\right\} \quad 27 + y = 3 \Longrightarrow y = 3$$

C' (9, 3)
D' (9, 0)
P(C') = P(9, 3) = 30*9 + 30*3 = 360 < P(B) = 542
P(D') = P(9, 0) = 30*9 = 270 < P(B) = 540

<u>Ερώτημα 3 :</u>
Ο περιορισμός $y \leq 12$ είναι ενεργός. Όταν αντικατασταθεί από τον $y \leq 13$,έχουμε νέα αποδεκτή περιοχή OA'B'CD.
A'(0,13)

$$\left.\begin{array}{l} y = 13 \\ 3x + y = 30 \end{array}\right\} \quad 3x + 13 = 30 \Longrightarrow 3x = 17 \Longrightarrow x = 17/3$$

B'(17/3, 13)
Άρα P(B') = P(17/3, 13) = 30*17/3 + 30*13 = 560 > P(B) = 540
Έχουμε νέα λύση x = 17/3 χιλ.A & y = 13 χιλ.B με νέο κέρδος P(B') = 560 χιλ.€ αυξημένο κατά 20 χιλ. € που είναι η σκιώδης τιμή.

<u>Ερώτημα 4 :</u>
Ο περιορισμός $3x + y \leq 30$ είναι ενεργός. Όταν αντικατασταθεί από τον $3x + y \leq 31$, έχουμε νέα αποδεκτή περιοχή OAB''C''D.

$$\left.\begin{array}{r} y = 12 \\ 3x + y = 31 \end{array}\right\} \Longrightarrow 3x + 12 = 31 \Longrightarrow x = 19/3$$

B''(19/3,12)

Άρα P(B’’) = P(19/3,12) = 30*19/3 + 30*12 = 550

$$\left.\begin{array}{l} x = 8 \\ 3x + y = 31 \end{array}\right\} \Longrightarrow 24 + y = 31 \Longrightarrow \quad y = 7$$

C"(8,7)

Άρα P(C") = P(8,7) = 30*8 + 30*7 = 450

Έχουμε ***νέα βέλτιστη λύση x = 19/3 χιλ. προϊόντα Α και y = 12 χιλ. προϊόντα Β*** που οδηγεί σε **νέο μέγιστο κέρδος P(B") =550 χιλ. €** που είναι κατά 10 χιλ. € μεγαλύτερο από το παλιό βέλτιστο κέρδος. Αυτή η τιμή των **10** χιλ. € είναι και η **σκιώδης τιμή** γι’αυτόν τον περιορισμό.

<u>Ερώτημα 5 :</u>

Ο περιορισμός $x \leq 8$ είναι μη ενεργός, πράγμα που σημαίνει ότι έχει σκιώδη τιμή ίση με μηδέν, την οποία και διατηρεί όσο η σταθερά 8 του 2^{ου} μέλους κινείται στο διάστημα $[6,+\infty)$.
Ο περιορισμός $y \leq 12$ είναι ενεργός και έχει σκιώδη τιμή ίση με 20 χιλ. €, την οποία και διατηρεί όσο η σταθερά 12 του 2^{ου} μέλους κινείται στο διάστημα [6,30].
Ο περιορισμός $3x + y \leq 30$ είναι ενεργός και έχει σκιώδη τιμή 10 χιλ. €, που διατηρεί όσο η σταθερά 30 του 2^{ου} μέλους κινείται στο διάστημα [0,36].

<u>Λύση 3^{ου} Θέματος</u>

1^{ος} τρόπος:

Έστω x_i ,i=1,2,…,13 τα ρολά που θα κοπούν με την μέθοδο κοπής i ,i=1,2,…,13.
Επιθυμώ να καταναλώσω τον ελάχιστο αριθμό ρολών : $\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{13}$
Υπό τους περιορισμούς : $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 560$
$x_2 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 320$
$x_3 + 2x_4 + x_6 + 2x_8 + x_9 + 4x_{11} + 2x_{12} \geq 850$
$x_2 + 2x_3 + 3x_5 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 4x_{10} + 3x_{12} + 6x_{13} \geq 180$
$x_i \geq 0$,i=1,2,…,13

2^{ος} τρόπος:

Υπολογίζω τις απώλειες για κάθε μέθοδο :

	ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΟΠΗΣ												
ΠΛΑΤΟΣ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
60 cm	2	1	1	1	1								
50 cm		1				2	2	1	1	1			
30 cm			1	2		1		2	1		4	2	
20 cm		1	2		3		1	1	2	4		3	6
ΣΥΝΟΛΟ	120	130	130	120	120	130	120	130	120	130	120	120	120
ΟΛΙΚΟ	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150
ΑΠΩΛΕΙΑ	30	20	20	30	30	20	30	20	30	20	30	30	30

Επιθυμώ να ελαχιστοποιήσω τις απώλειες :$\boldsymbol{min\ Z = 30x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 30x_4 + 30x_5 + 20x_6 + 30x_7 + 20x_8 + 30x_9 + 20x_{10} + 30x_{11} + 30x_{12} + 30x_{13}}$

Υπό τους **ίδιους περιορισμούς**, δηλ.:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 560$$
$$x_2 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 320$$
$$x_3 + 2x_4 + x_6 + 2x_8 + x_9 + 4x_{11} + 2x_{12} \geq 850$$
$$x_2 + 2x_3 + 3x_5 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 4x_{10} + 3x_{12} + 6x_{13} \geq 180$$
$$x_i \geq 0\ ,i=1,2,\ldots,13$$

Λύση 4ου Θέματος

Ερώτημα 1 :

1)Βασικό Μοντέλο

	ΚΕΡΔΟΣ	
ΖΗΤΗΣΗ	Παράγω 6000	Παράγω 8000
6000	6000*(200-100)=600000	6000·100-2000*50=500000
8000	600000	8000*100=800000

Κέρδος (από κάθε κομμάτι του βασικού μοντέλου, αν αυτό πουληθεί) =
=(Τιμή πώλησης μονάδος βασικού μοντέλου) - (Κόστος παραγωγής μονάδος βασικού μοντέλου) =
= 200 € - 100 € = 100 €

Ζημιά (από κάθε κομμάτι του βασικού μοντέλου που δεν πουλήθηκε αρχικά και μετά εκποιήθηκε) =
=(Τιμή εκποίησης μονάδος βασικού μοντέλου) - (Κόστος παραγωγής μονάδος βασικού μοντέλου) =
=50 € - 100 € = - 50 €

		ΠΑΡΑΓΩΓΗ 6000		ΠΑΡΑΓΩΓΗ 8000	
Ζήτηση	Πιθανότητα	Κέρδος	Σταθμισμένο Κέρδος	Κέρδος	Σταθμισμένο Κέρδος
6000	0,30	600000	180000	500000	150000
8000	0,70	600000	420000	800000	560000
ΣΥΝΟΛΑ :			660000		710000
					Βέλτιστο

$EMV_{\text{βασικού}}$ = 710000 € για παραγωγή 8000 κομματιών

2)Ψηφιακό Μοντέλο

	ΚΕΡΔΟΣ	
ΖΗΤΗΣΗ	Παράγω 2000	Παράγω 4000
2000	2000*150 = 300000	2000*150+2000*(-100) = 100000
4000	2000*150 = 300000	4000*150 = 600000

Κέρδος(από κάθε κομμάτι του ψηφιακού αν αυτό πουληθεί) = 350 € - 200 € = 150 €
Κέρδος(ζημία)(από κάθε κομμάτι του ψηφιακού αν δεν πουληθεί & εκποιηθεί) = 100 € -200 € = -100 €

(Άλλος τρόπος) :
2000*350 € – 4000*200 € + 2000*100 € = 700000 € - 800000 € + 200000 € = 100000

		ΠΑΡΑΓΩΓΗ 2000		ΠΑΡΑΓΩΓΗ 4000	
Ζήτηση	Πιθανότητα	Κέρδος	Σταθμισμένο Κέρδος	Κέρδος	Σταθμισμένο Κέρδος
2000	0,20	300000	60000	100000	20000
4000	0,80	300000	240000	600000	480000
ΣΥΝΟΛΑ :			300000		500000
					Βέλτιστο

$EMV_{ψηφιακού}$ = 500000 € για παραγωγή 4000 κομματιών ψηφιακού μοντέλου

<u>Ερώτημα 2 :</u>

Βέλτιστο πλάνο παραγωγής : (x, y) = (6000, 4000) με αναμενόμενο κέρδος 1.100.000 € .

ΒΛΕΠΕ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Λύση 5ου Θέματος

Αντικειμενική συνάρτηση : min F = $x_1 + 2x_2$

Υπό τους **περιορισμούς** :

$$
\begin{aligned}
5x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 3 \\
x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad &= 1 \\
-3x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad &= 3 \\
-3x_1 - 3x_2 \qquad\qquad\qquad + x_6 &= 2 \\
x_i \geq 0 \ , \ i = 1,\ldots,6 &
\end{aligned}
$$

i	Βάση	C	P_0	-1	2	0	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	3	5	-2	1	0	0	0
2	P_4	0	1	1	1	0	-1	0	0
3	P_5	0	3	-3	1	0	0	1	0
4	P_6	0	2	-3	-3	0	0	0	1
5			0	-1	2	0	0	0	0

Ο P_2 εισέρχεται στη βάση
(μέγιστο από τα θετικά)
k = 2 .