Θεόδωρος Αλεξόπουλος, Αναπληρωτής Καθηγητής
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3019, Fax: 210 772-3021
e-mail: theoalex@central.ntua.gr

Theodoros Alexopoulos, Associate Profess
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3019, Fax: +30 210 772-30
e-mail: Theodoros.Alexopoulos@cern.ch
http://www.physics.ntua.gr/Faculty/theoalex

Μάθημα: Ανάλυση Σήματος

Προβλήματα 2

(Κεφάλαιο: Μετασχηματισμός Fourier)

Πρόβλημα 0.1 Θεωρούμε ένα πρόβλημα δυο ανεξάρτητων διαστάσεων x, y. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier να δείξετε την παρακάτω σχέση ανάμεσα στον τετραγωνικό και τον τριγωνικό παλμό:

$$\Pi(x)\Pi(y) * \Pi(x)\Pi(y) = \Lambda(x)\Lambda(y).$$

Πρόβλημα 0.2 Τα πολυώνυμα του Hermite εμφανίζονται σε πολλά κεφάλαια της Φυσικής και Μηχανικής όπως στη λύση του αρμονικού κβαντικού ταλαντωτή, κλπ. Ορίζονται από τη σχέση:

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right),$$

και είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Hermite:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2ny = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ορίζουμε μια ακολουθία νέων συναρτήσεων ως ακολούθως:

$$\psi_n(x) = H_n\left(\sqrt{2\pi}x\right)\mathrm{e}^{-\pi x^2}.$$

Να δείξετε τον παρακάτω μετασχηματισμό Fourier:

$$\psi_n(f) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (-j)^n \psi_n(f) \quad \text{ή} \quad \mathcal{F}\left[\psi_n(f)\right] = (-j)^n \psi_n(f),$$

όπου f είναι η συχνότητα που συνδέεται με την κυκλική συχνότητα, ω, από τη σχέση $\omega = 2\pi f$. Αυτό το αποτέλεσμα δηλώνει ότι οι συναρτήσεις $\psi_0(f)$, $\psi_1(f), \psi_2(f), \psi_3(f), \ldots \psi_n(f)$ είναι ιδιοσυναρτήσεις του μετασχηματισμού Fourier με αντίστοιχες ιδιοτιμές τα 1, $-j$, -1, j, $\ldots, (-j)^n$.

Πρόβλημα 0.3 Θεωρείστε σωματίδια μέσα σε ένα υγρό. Έστω $f(x,t)$ η πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί ένα σωματίδιο στο σημείο x τη χρονική στιγμή t. Ο Einstein έδειξε ότι για μερικά συστήματα η $f(x,t)$ υπακούει στην εξίσωση διάχυσης:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x},$$

όπου D είναι η σταθερά διάχυσης.
Εφαρμόζοντας το μετασχηματιμό Fourier, να βρείτε την πυκνότητα πιθανότητας $f(x,t)$ για αρχική συνθήκη $f(x,0) = \delta(x)$. Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της $f(x,t)$;

Πρόβλημα 0.4 Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Parseval να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}.$$

Πρόβλημα 0.5 Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του πολυωνύμου:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots a_n t^n.$$

Πρόβλημα 0.6 Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier να δείξετε ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - y = \mathrm{e}^{-a|t|}, \quad a > 1,\ a \neq 1,\ \ y(\pm\infty) = 0,$$

έχει τη μορφή:

$$y(t) = \frac{1}{a^2-1}\left[\mathrm{e}^{-a|t|} - a\mathrm{e}^{-|t|}\right].$$

Πρόβλημα 0.7 Ο μετασχηματισμός cosine Fourier ενός σήματος $f(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$F_c(\omega) = \mathcal{F}_c\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t,$$

με τον αντίστροφό του:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}\omega.$$

Να δείξετε ότι ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα της δεύτερης παραγώγου:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}_c} -\omega^2 F_c(\omega) - f'(0).$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού cosine Fourier να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} - a^2 f = 0, \quad y(+\infty) = 0, \quad y'(0) = b.$$

Πρόβλημα 0.8 Να δείξετε ότι η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης της θερμότητας:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x},$$

όπου κ είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, και $u(x,t)$ είναι η θερμοκρασία στη θέση x τη χρονική στιγμή t, έχει τη λύση της μορφής:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\tau^2} f(x - 2\tau\sqrt{kt})\,\mathrm{d}\tau,$$

όπου $-\infty < x < +\infty,\ t > 0$ και $|u(x,t)| < M$ είναι πεπερασμένη.
