ΣΕΜΦΕ Μαθηματική Ανάλυση ΙΙΙ Σεπτέμβριος 2004

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ 1ο Α. Θεωρούμε ένα τόπο D με σύνορο ∂D στον οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα Green. Αν $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ είναι μια συμβατή το θεώρημα Green παραμετρική παράσταση του συνόρου ∂D και $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|}(y'(t),\ -x'(t))$ το προς τα έξω κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα του συνόρου, να αποδείξετε ότι για το διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ ισχύει: $\oint_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dr = \iint_D divF dxdy$.

Β. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{-x^3}{(x^2+y^2)^2} \right)$.

Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{ABCDEZA} \mathbf{F} d\boldsymbol{r}$ στην κλειστή τεθλασμένη $ABCDEZA$ με $A(1,1)$, $B(0,2)$, $C(-1,1)$, $D(-1,0)$, $E(0,-2)$, $Z(1,0)$.

ΘΕΜΑ 2ο: Α. Δίνεται η επιφάνεια $S: z = 9 - x^2 - y^2, (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 9\}$ και το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x,y,0)$.

1. Να υπολογισθούν: α) ένα κάθετο διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{N}$ στην επιφάνεια. β) το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ στα σημεία της επιφάνειας A(1,0,8) και B(1,2,4). Να σχεδιασθεί πρόχειρα η επιφάνεια και να τοποθετηθούν στα σημεία της A και B τα διανύσματα $\boldsymbol{U}$ και $\boldsymbol{F}$.
2. Να υπολογισθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \boldsymbol{F} d\boldsymbol{s}$ στην επιφάνεια S με θετική όψη αυτή με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\boldsymbol{N}$ για το οποίο $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{k} > 0$.

Β. Για τη διαφορίσιμη συνάρτηση $\Phi(x,y,z)$ είναι γνωστό ότι $\Phi(0,0,0) = 1$ και $\nabla\Phi(x,y,z) = (e^z, z, xe^z + y)$. Χωρίς να βρεθεί η $\Phi(x,y,z)$ να υπολογισθεί, με τη βοήθεια επικαμπυλίου ολοκληρώματος, η τιμή $\Phi(1,3,1)$.

ΘΕΜΑ 3ο: Α. Δίνεται το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2-x^2} x dy \right) dx$.

1) Να σχεδιασθεί το χωρίο ολοκλήρωσης.
2) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα.
3) Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης.

Β. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\iint_\Omega (x+y)^2 e^{x-y} dxdy$ όπου Ω είναι το χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $x+y=1, x+y=2, x-y=-1, x-y=1$.

ΘΕΜΑ 4ο: Αν $\alpha = \mathbf{rot}\beta$, $\beta = (2y^2, x, -z^3)$, να υπολογισθεί η ροή του πεδίου α δια της επιφάνειας $x^2 + y^2 \le 1$, $z = 1$ κατά τη θετική φορά του z-άξονα και να επαληθευθεί το αποτέλεσμα με ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Διάρκεια Εξέτασης 3Ω