ΑΛΓΕΒΡΑ – Τ.ΕΜ.Φ.Ε. 5ο ΕΞ.

28/1/2002

Βαθμολογία ανά θέμα: 1 / 2 / 3 / 2 / 3.
Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες.

1. Έστω D_4 η ομάδα συμμετριών του τετραγώνου και έστω N η υποομάδα των στροφών της D_4. Δείξτε ότι: **α)** Η N είναι κανονική υποομάδα της D_4.
β) Η ομάδα πηλίκο D_4/N είναι ισόμορφη προς την $\mathbb{Z}_2$.

2. **α)** Δείξτε ότι η συμμετρική ομάδα S_n παράγεται από τις στοιχειώδεις αντιμεταθέσεις $(i, i+1)$ για $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$ $\forall\, n \geq 2$, θεωρώντας γνωστό ότι η S_n παράγεται από αντιμεταθέσεις. **β)** Χρησιμοποιώντας το α) δείξτε ότι η S_n παράγεται από τα στοιχεία $t=(12)$, $c=(12\cdots n)$ και $c^{-1}=(n\ n-1 \cdots 1)$.

3. Σε μία ομάδα G, το σύνολο $Z_G = \{x \in G \mid gx = xg\ \forall g \in G\}$ ονομάζεται <u>κέντρο της G</u>. Δείξτε ότι: **α)** Το Z_G είναι μία αβελιανή, κανονική υποομάδα της G.
β) Αν G/Z_G είναι κυκλική, τότε η G είναι αβελιανή.
γ) Το κέντρο της ομάδας $G = GL_3(\mathbb{R})$ των αντιστρέψιμων 3×3 πραγματικών πινάκων αποτελείται από όλους τους πίνακες της μορφής $a \cdot I_3$, όπου $a \in \mathbb{R}$ και I_3 ο ταυτοτικός 3×3 πίνακας.
<u>Υπόδειξη</u>: Θεωρείστε τους πίνακες E_{ij} με 1 στην (i,j)-θέση και 0 παντού αλλού.
δ) Το κέντρο της ομάδας S_n είναι τετριμμένο $\forall\, n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 3$, δηλαδή $Z_{S_n} = \{e\}$.
<u>Υπόδειξη</u>: Πάρτε $a,b,c \in \{1,\dots,n\}$ διαφορετικά μεταξύ τους και εφαρμόστε κατάλληλο αναγωγή.

4. **α)** Διατυπώστε το θεώρημα Ταξινόμησης των πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων. **β)** Δώστε όλες τις αβελιανές ομάδες τάξης 36.
γ) Εκφράστε την ομάδα $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\langle(3,3)\rangle$ σύμφωνα με την παραπάνω ταξινόμηση.
δ) Έστω G αβελιανή ομάδα με $|G|=n$. Δείξτε ότι $\forall$ διαιρέτη d του n υπάρχει υποομάδα H της G με $|H|=d$. (Θεωρείστε γνωστό το αντίστροφο του θεωρήματος Lagrange για κυκλικές ομάδες.)

5. Έστω R μη μηδενικός δακτύλιος με τουλάχιστον δύο στοιχεία. Υποθέτουμε ότι $\forall\, a \in R$ μη μηδενικό υπάρχει μοναδικό $b \in R$ τέτοιο, ώστε $aba = a$.
α) Δείξτε ότι ο R δεν έχει διαιρέτες του 0, δηλαδή $\forall\, a \neq 0\ \nexists\, c \neq 0$ με $a \cdot c = 0$.
β) Δείξτε ότι $bab = b$. **γ)** Δείξτε ότι ο R έχει μοναδιαίο στοιχείο.
δ) Δείξτε ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο του R είναι αντιστρέψιμο.
<u>Υπόδειξη</u>: Για τα α), β) χρησιμοποιείστε τη μοναδικότητα του b. Για το γ) θεωρείστε το στοιχείο $e = ab$, και το ότι $e^2 = e$.

[illegible]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!
Σ. Λαμπροπούλου