

1) Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από δύο σωματίδια με σπίν $\frac{1}{2}$ και με μαγνητική ροπή μ_0 το καθένα (σύστημα A), και από ένα δεύτερο σύστημα, A' , που αποτελείται από δύο σωματίδια με σπίν $\frac{1}{2}$ και με μαγνητική ροπή $2\mu_0$ το καθένα. Τα δύο συστήματα τοποθετούνται σε μαγνητικό πεδίο B . (α) Να απαριθμήσετε όλες τις προστίτες καταστάσεις του συστήματος $A' = A + A'$. Για κάθε μία από αυτές να βρείτε την ολική μαγνήτιση και την ολική ενέργεια. (β) Τα συστήματα A και A' αρχικά δεν βρίσκονται σε επαφή. Η μαγνητική ροπή του A είναι $M = -2\mu_0$ ενώ η μαγνητική ροπή του A' είναι $M' = 4\mu_0$. Τα συστήματα έρχονται κατόπιν σε επαφή, ώστε να μπορούν να ανταλλάσσουν ενέργεια ελεύθερα, είναι απομονωμένα από το περιβάλλον και φθάνουν στην κατάσταση ισορροπίας. Να υπολογίσετε (i) τις πιθανότητες $P(M)$ και $P(M')$ για να πάρουν οι ολικές μαγνητικές ροπές των A και A' μία από τις δυνατές τους τιμές M και M' αντιστοίχως, (ii) τη μέση τιμή των M , $\langle M \rangle$ και (iii) τις τιμές της πιθανότητας $P(M)$ και της μέσης τιμής $\langle M \rangle$ στην περίπτωση που τα συστήματα χωρίζονται ξανά, ώστε να μην είναι πια ελεύθερα να ανταλλάξουν ενέργεια μεταξύ τους.

(α) Έχουμε συνολικά $2^N = 2^4 = 16$ καταστάσεις.

	A		A'		M	M'	M^*	E	E'	E^*
1	+	+	+	+	$2\mu_0$	$4\mu_0$	$6\mu_0$	$-2\mu_0B$	$-4\mu_0B$	$-6\mu_0B$
2	+	+	+	-	$2\mu_0$	0	$2\mu_0$	$-2\mu_0B$	0	$-2\mu_0B$
3	+	+	-	+	$2\mu_0$	0	$2\mu_0$	$-2\mu_0B$	0	$-2\mu_0B$
4	+	+	-	-	$2\mu_0$	$-4\mu_0$	$-2\mu_0$	$-2\mu_0B$	$4\mu_0B$	$2\mu_0B$
5	+	-	+	+	0	$4\mu_0$	$4\mu_0$	0	$-4\mu_0B$	$-4\mu_0B$
6	+	-	+	-	0	0	0	0	0	0
7	+	-	-	+	0	0	0	0	0	0
8	+	-	-	-	0	$-4\mu_0$	$-4\mu_0$	0	$4\mu_0B$	$4\mu_0B$
9	-	+	+	+	0	$4\mu_0$	$4\mu_0$	0	$-4\mu_0B$	$-4\mu_0B$
10	-	+	+	-	0	0	0	0	0	0
11	-	+	-	+	0	0	0	0	0	0
12	-	+	-	-	0	$-4\mu_0$	$-4\mu_0$	0	$4\mu_0B$	$4\mu_0B$
13	-	-	+	+	$-2\mu_0$	$4\mu_0$	$2\mu_0$	$2\mu_0B$	$-4\mu_0B$	$-2\mu_0B$
14	-	-	+	-	$-2\mu_0$	0	$-2\mu_0$	$2\mu_0B$	0	$2\mu_0B$
15	-	-	-	+	$-2\mu_0$	0	$-2\mu_0$	$2\mu_0B$	0	$2\mu_0B$
16	-	-	-	-	$-2\mu_0$	$-4\mu_0$	$-6\mu_0$	$2\mu_0B$	$4\mu_0B$	$6\mu_0B$

το + ισοδύναμει με σπίν \uparrow , δηλ. μαγνητική ροπή παράλληλη με το B

το - ισοδύναμει με σπίν \downarrow , δηλ. μαγνητική ροπή παράλληλη με το $-B$

(β) Αρχικά, προτού έρθουν σε θερμική επαφή τα δύο συστήματα, A και A' , το σύστημα A^* , βρίσκεται στην κατάσταση # 13:

	A		A'		M	M'	M^*	E	E'	E^*
13	-	-	+	+	$-2\mu_0$	$4\mu_0$	$2\mu_0$	$2\mu_0B$	$-4\mu_0B$	$-2\mu_0B$

Αφού έρθουν σε επαφή τα δύο συστήματα, A και A' , το A^* μπορεί να βρίσκεται, με ίση πιθανότητα, σε κάθε μία από τις καταστάσεις με ίδια ολική μαγνήτιση $M^* = 2\mu_0$ και άρα ολική ενέργεια $E^* = -2\mu_0B$. Σύμφωνα με τον πίνακα οι καταστάσεις αυτές είναι οι εξής τρεις: # 2, 3, 13.

	A		A'		M	M'	M^*	E	E'	E^*
2	+	-	-	-	$2\mu_0$	0	$2\mu_0$	$-2\mu_0B$	0	$-2\mu_0B$
3	-	+	-	-	$2\mu_0$	0	$2\mu_0$	$-2\mu_0B$	0	$-2\mu_0B$
13	-	-	+	+	$-2\mu_0$	$4\mu_0$	$2\mu_0$	$2\mu_0B$	$-4\mu_0B$	$-2\mu_0B$

(βι, ii, iii) Παρατηρούμε ότι η μαγνητική ροπή, M , του A και η μαγνητική ροπή, M' , του A' παίρνουν τις τιμές

$M = 2\mu_0$ και $M' = 0$ δύο φορές (#2, #3)

και $M = -2\mu_0$ και $M' = 4\mu_0$ μία φορά (#13)

Άρα,

$P(M=2\mu_0) = 2/3$, $P(M=-2\mu_0) = 1/3$

και $\langle M \rangle = (2\mu_0)P(M=2\mu_0) + (-2\mu_0)P(M=-2\mu_0) = (2\mu_0)(2/3) + (-2\mu_0)(1/3) = (2/3)\mu_0$

Αντιστοίχως,

$P(M'=0) = 2/3$, $P(M'=4\mu_0) = 1/3$

και $\langle M' \rangle = (0)P(M'=0) + (4\mu_0)P(M'=4\mu_0) = 0 + (4\mu_0)(1/3) = (4/3)\mu_0$

Συνεπώς, $\langle M \rangle = (2/3)\mu_0$ και $\langle M' \rangle = (4/3)\mu_0$ και βέβαια, $\langle M^* \rangle = \langle M \rangle + \langle M' \rangle = 2\mu_0$.

(β iv) Στην περίπτωση που τα συστήματα A και A' χωρίζονται ξανά, ώστε να μη μπορούν να ανταλλάξουν ενέργεια μεταξύ τους, οι τιμές της πιθανότητας $P(M)$, καθώς και η μέση μαγνητική ροπή $\langle M \rangle$, δεν θα αλλάξουν.

2) Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από ένα σωματίδιο με σπιν $\frac{1}{2}$ και με μαγνητική ροπή m_0 το (σύστημα A), και από ένα δεύτερο σύστημα, A' , που αποτελείται από έναν αυθαίρετα μεγάλο αριθμό N σωματίδων με σπιν $\frac{1}{2}$ και με μαγνητική ροπή m_0 το καθένα. Τα δύο συστήματα τοποθετούνται στο ίδιο μαγνητικό πεδίο B . Όταν η ροπή του A κατευθύνεται προς τα πάνω, η από τις ροπές του A' κατευθύνονται προς τα πάνω και οι υπόλοιπες $N - 1$ κατευθύνονται προς τα κάτω.

(a) Να βρείτε τον αριθμό των προσιτών καταστάσεων στο σύστημα $A' = A + A'$, όταν η ροπή του A κατευθύνεται προς τα πάνω. Αυτός ο αριθμός είναι το πλήθος των τρόπων κατά τους οποίους μπορούν να τακτοποιούνται τα N σπιν του A , ώστε η από αυτά να κατευθύνονται προς τα πάνω και η από αυτά να κατευθύνονται προς τα κάτω. (β) Υποθέτουμε τώρα ότι η ροπή του συστήματος A κατευθύνεται προς τα κάτω. Η ολική ενέργεια του A' παραμένει αμετάβλητη. Πόσες από τις ροπές του συστήματος A' κατευθύνονται προς τα πάνω και πόσες κατευθύνονται προς τα κάτω; Να βρείτε αντίστοιχα τον αριθμό των προσιτών καταστάσεων για το σύστημα A' . (γ) Να υπολογίσετε το λόγο P/P_+ , όπου P_+ είναι η πιθανότητα για να κατευθύνεται η ροπή του A προς τα κάτω και P_- είναι η πιθανότητα για να κατευθύνεται η ροπή του A προς τα πάνω. Το αποτέλεσμα απλοποιείται αν θεωρήσουμε ότι $n >> 1$ και $n' >> 1$. Αν $n > n'$, ο λόγος P/P_+ είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα;

(a) Ο αριθμός των καταστάσεων που είναι προσιτές στο σύστημα $A' = (A + A')$ όταν η μαγνητική ροπή του A δείχνει επάνω (+, δηλαδή με φορά παράλληλη στο μαγνητικό πεδίο B) (και άρα η μαγνητικές ροπές του A δείχνουν επάνω (+) και οι υπόλοιπες $N-n$ μαγνητικές ροπές του A' δείχνουν προς τα κάτω (-)), είναι $N_+ = N!/[n!(N-n)!]$

(β) Η μαγνητική ροπή του A δείχνει τώρα προς τα κάτω (-), δηλαδή με φορά αντιπαράλληλη στο μαγνητικό πεδίο B , ενώ τα A και A' συνεχίζουν να βρίσκονται σε θερμική επαφή. Η ενέργεια E^* του A^* παραμένει σταθερή. Εφόσον η μαγνητική ροπή του A δείχνει προς τα κάτω (-), τότε, για να παραμείνει η ολική ενέργεια E^* σταθερή, $(n+1)$ μαγνητικές ροπές του A' πρέπει να δείχνουν προς τα επάνω (+) και $[N-(n+1)]$ μαγνητικές ροπές του A' πρέπει να δείχνουν προς τα κάτω (-).

Άρα, ο αριθμός των καταστάσεων που είναι προσιτές στο σύστημα $A^* = (A + A')$ όταν η μαγνητική ροπή του A δείχνει προς τα κάτω είναι $N_- = N!/[(n+1)!(N-(n+1))!]$

Ο ολικός αριθμός των προσιτών καταστάσεων στο σύστημα A^* με ενέργεια E^* είναι τότε:

$$N_+ + N_- = N!/[n!(N-n)!] + N!/[(n+1)!(N-(n+1))!] = \\ N!(n+1)/[(n+1)!(N-n)!] + N!(N-n)/[(n+1)!(N-n)!] = \\ (n+1+N-n)N! / [(n+1)!(N-n)!] = (N+1)N! / [(n+1)!(N-n)!] = \\ (N+1)! / [(n+1)!(N-n)!]$$

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι το σύστημα $A^* = (A+A')$ με $N+1$ σωματίδια, οποιαδήποτε $(n+1)$ από αυτά μαγνητική ροπή προς τα επάνω και τα υπόλοιπα $[N-(n+1)]$ έχουν μαγνητική ροπή προς τα κάτω.

(γ) $P_+ \propto N_+, P_- \propto N_-$.

$$P_+ / P_- = N_+ / N_- = \{N!/[n!(N-n)!]\} / \{N!/[(n+1)!(N-(n+1))!]\} \\ = (n+1) / (N-n) = (n+1) / n'$$

$$P_- / P_+ = n' / (n+1) \approx (n'/n)(1+1/n)^{-1} \approx (n'/n)(1-1/n + \dots)$$

άρα, για $n \gg 1$ και για $n' \gg 1$, $P_- / P_+ \approx (n'/n)$.

Αυτό δηλώνει ότι αν η ολική μαγνητική ροπή ενός συστήματος $A^* = (A+A')$ δείχνει προς τα επάνω, τότε το κάθε ένα σπιν του συστήματος έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να δείχνει προς τα επάνω (δηλαδή παράλληλα προς το μαγνητικό πεδίο B) παρά προς τα κάτω.

3) (α) Για ένα στατιστικό σύνολο κλασικών μονοδιάστατων αρμονικών ταλαντωτών, η μετατόπιση ενός ταλαντωτή είναι $x = A \cos(\omega t + \phi)$. Να υποθέσετε ότι η γωνία ϕ μπορεί να πάρει κάθε τιμή $0 < \phi < 2\pi$ με ίση πιθανότητα: $w(\phi)d\phi = (2\pi)^{-1} d\phi$. Για κάθε χρονική στιγμή t , να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(x) dx$ να βρεθεί ένας ταλαντωτής μεταξύ των τιμών x και $x + dx$. Να εκφράσετε το $P(x)$ συναρτήσει των A και x .

(β) Θεωρήστε τον κλασικό χώρο των φάσεων για ένα τέτοιο στατιστικό σύνολο με ενέργειες μεταξύ E και $E + \delta E$. Να βρείτε το $P(x)dx$ υπολογίζοντας το λόγο των «δύκου» στον χώρο των φάσεων που

βρίσκεται σ' αυτό το εύρος ενέργειακών τιμών και μεταξύ των τιμών x και $x + dx$ ως προς τον ολικό «όγκο» στον χώρο των φάσεων στο εύρος ενέργειακών τιμών μεταξύ E και $E+\delta E$. Να εκφράσετε το $P(x)$ συναρπάτησης των E και x .

(γ) Να δείξετε ότι τα αποτελέσματα από το (α) και το (β) είναι ίδια.

α) Η πιθανότητα μεταπότισης x είναι η πιθανότητα να παίρνει η φ την ανίστοιχη τιμή που προκύπτει από τη σχέση $x = A \cos(\omega t + \phi)$.

$w(\phi) d\phi = d\phi/2\pi$ και $P(x)dx = 2w(\phi)d\phi$. Ο παράγοντας 2 προκύπτει επειδή δύο τιμές του φ δίνουν το ίδιο x : $\varphi_1 = \phi, \varphi_2 = 2\pi - \phi$.

$$d\varphi/dx = -A \sin(\omega t + \phi) = -A[1 - \cos^2(\omega t + \phi)] = -[A^2 - x^2]^{1/2}$$

Άρα, $|d\varphi/dx| = [A^2 - x^2]^{1/2}$ και $P(x)dx = 2d\varphi/2\pi = [2/2\pi] [d\varphi/dx] dx = \pi^{-1} [A^2 - x^2]^{1/2} dx$.

$$P(x)dx = \pi^{-1} [A^2 - x^2]^{1/2} dx$$

β) Ο λόγος κατεύλημμένου «όγκου» δύ στο χώρο των φάσεων (x, y) όταν ο ταλαντωτής βρίσκεται μεταξύ x και $x+dx$, με ενέργειες μεταξύ E και $E+\delta E$, ως προς τον ολικό προσιτό «όγκο» υ μεταξύ E και $E+\delta E$, δύ/υ. Αυτός ο λόγος, δύ/υ, ισούται με $P(x)dx$.

Για να βρεθεί ο όγκος v :

$$A = \pi r_{max} x_{max} \quad (\text{επιφάνεια έλλειψης})$$

$$\text{Έχουμε έλλειψη, επειδή } E = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2.$$

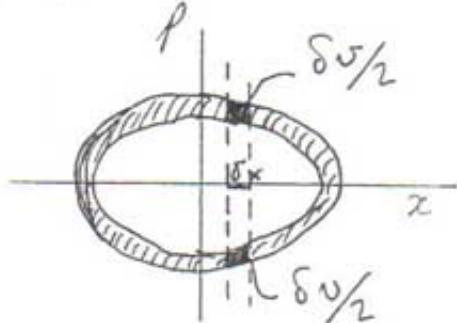
Όταν $p = p_{max}$, τότε $x = 0$ και $p_{max} = [2mE]^{1/2}$. Όταν $x = x_{max}$, τότε $p = 0$ και $x_{max} = [2E/m\omega^2]^{1/2}$.

$$\text{Καμπύλες σταθερής } E: A(E) = \pi [2mE]^{1/2} [2E/m\omega^2]^{1/2} = 2\pi E/\omega.$$

$$\text{Συνεπώς, } A(E+\delta E) - A(E) = [2\pi/\omega]\delta E, \text{ δηλαδή } v = [2\pi/\omega]\delta E.$$

Άρα, $P(x)dx = [2\delta p \delta x]/([2\pi/\omega]\delta E)$.

Επειδή $p^2 = 2mE$, $2p\delta p = 2m\delta E$ και κατά συνέπεια, $P(x)dx = [(m\omega\delta E)/(p\delta E)]dx = [m\omega/\pi]dx/p$.



$$P(x)dx = [m\omega/\pi]dx / [2mE - m^2\omega^2x^2]^{1/2}$$

(γ) Επειδή $x = A \cos(\omega t + \phi)$, $E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$ και άρα $P(x)dx = \pi^{-1} [A^2 - x^2]^{1/2} dx$.

4) Ένα δοχείο διαχωρίζεται από ένα πέτασμα με λόγο 4 προς 1. Το μεγαλύτερο μέρος περιέχει 1000 μόρια αερίου N_e (*) και το μικρότερο 200 μόρια αερίου N_{He} (#). Στο πέτασμα κατόπιν ανοίγεται μία μικρή τρύπα. Περιμένουμε να επέλθει ισορροπία. (α) Να βρείτε τον μέσο αριθμό μορίων του κάθε τύπου στην κάθε πλευρά του δοχείου. (β) Ποια έναι η πιθανότητα να βρείτε 1000 μόρια του N_e στο μεγαλύτερο μέρος και 100 μόρια N_{He} στο μικρότερο μέρος του δοχείου αντιστοίχως; (Να βρεθεί, δηλαδή, ξανά το σύστημα στην αρχική του κατάσταση)

***** * * * *	# # # #
* * * * * * * *	# #
* * * * * * * * * *	# #
* * * * * * * * * *	#
***** * * * *	#

(α) Όταν επέλθει η ισορροπία, τα μόρια του κάθε αερίου θα είναι ισοκατανεμημένα (θα είναι δηλαδή κατανεμημένα με ίση πιθανότητα) σε δύο τον όγκο του δοχείου. Άρα, στο αριστερό μέρος του δοχείου (που καταλαμβάνει τα 4/5 του συνολικού όγκου) θα βρίσκονται τα 4/5 του κάθε αερίου. Για το δεξιό μέρος αντιστίχως θα βρίσκονται το 1/5 των μορίων του κάθε αερίου.

$$\langle N_{Ne} \rangle_{(\text{αριστερό})} = (4/5) N_{Ne} = (4/5) \times 1000 = 800$$

$$\langle N_{He} \rangle_{(\text{αριστερό})} = (4/5) N_{He} = (4/5) \times 200 = 160$$

$$\langle N_{Ne} \rangle_{(\text{δεξιό})} = (1/5) N_{Ne} = (1/5) \times 1000 = 200$$

$$\langle N_{He} \rangle_{(\text{δεξιό})} = (1/5) N_{He} = (1/5) \times 200 = 40$$

(β) Ο αριθμός των καταστάσεων που είναι προσιτές σε κάθε μόριο είναι ανάλογος του διαθέσιμου όγκου, $\Omega \propto V$. Τότε,

$$\text{για κάθε ένα μόριο τύπου } \alpha, \quad (\Omega_{1f}^{(a)} / \Omega_{1t}^{(a)}) = (V_f^{(a)} / V_i^{(a)}), \quad \text{όπου } \Omega_{1f}^{(a)}, \Omega_{1t}^{(a)}$$

είναι ο [αρχικός (i), τελικός (f)] αριθμός των καταστάσεων του ενός μορίου τύπου a ,

$$\text{και για } N_a \text{ μόρια τύπου } \alpha: \quad (\Omega_f^{(a)} / \Omega_i^{(a)}) = (V_f^{(a)} / V_i^{(a)})^{N_a}$$

Η πιθανότητα βρούμε πάλι την αρχική κατάσταση, δηλαδή τα 1000 μόρια Ne στο αριστερό και τα 200 μόρια He στο δεξιό μέρος του δοχείου είναι

$$P = \left(\frac{V_{\text{αριστερά}}}{V_{\text{δεξιά}}} \right)^{1000} \times \left(\frac{V_{\text{δεξιά}}}{V_{\text{αριστερά}}} \right)^{200} = (4/5)^{1000} \times (1/5)^{200} = 1,98 \times 10^{-237}$$

↓ ↓
(για το Ne) (για το He)

5) Η ιδιότητα να γίνεται ελάχιστη η ελεύθερη ενέργεια για ένα σύστημα που βρίσκεται σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας Οταν δύο συστήματα A και A' τεθούν σε θερμική επαφή, η ολική τους εντροπία τίνει να αυξηθεί σύμφωνα με τη σχέση $\Delta S + \Delta S' \geq 0$. Άρα, η κατάσταση ισορροπίας που επιτυγχάνεται, όταν το σύστημα A απορροφήσει ποσό θερμότητας $Q = \Delta E$, αντιστοιχεί στην κατάσταση όπου η τελική εντροπία $S + S'$ των σύνθετου απομονωμένου συστήματος γίνεται μέγιστη.

Υποθέτουμε τώρα ότι το σύστημα A είναι μικρό σε σύγκριση με το A', έτσι ώστε το A' να συμπεριφέρεται σαν μία δεξαμενή θερμότητας σε κάποια σταθερή απόλυτη θερμοκρασία T . Η μεταβολή της εντροπίας $\Delta S'$ του A' μπορεί τότε να εκφραστεί πολύ απλά ως συνάρτηση των ΔE και T . Να αποδειχτεί ότι η σχέση $\Delta S + \Delta S' \geq 0$, στην περίπτωση αυτή, συνεπάγεται ότι η ποσότητα $F = E - TS$ τίνει να ελαττωθεί και γίνεται ελάχιστη στην κατάσταση ισορροπίας. (Η F είναι η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz του συστήματος A στη σταθερή θερμοκρασία T).

Για να φτάσουν τα συστήματα A και A' σε κατάσταση ισορροπίας, το σύστημα A απορρόφησε ποσότητα θερμότητας Q. $Q = \Delta E$. (Επειδή δεν γίνεται μακροσκοπικό έργο, $W = 0$)

Το σύστημα A' απορρόφησε ποσότητα θερμότητας Q' . Άρα, η μεταβολή στην εντροπία του A' είναι:

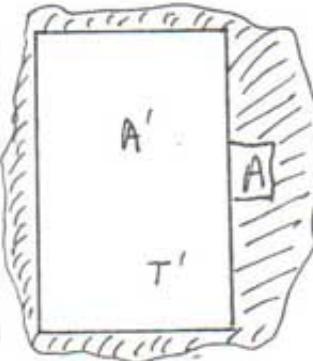
$$\Delta S' = Q'/T$$

$$\text{Όμως, } Q' = -Q = -\Delta E \quad \text{Άρα, } \Delta S' = Q'/T = -\Delta E/T$$

$$\text{Επειδή } \Delta S + \Delta S' \geq 0 \Rightarrow \Delta S - \Delta E/T \geq 0$$

$$\text{Άρα, } T\Delta S - \Delta E \geq 0, \text{ ή } \Delta(E - TS) \leq 0 \Rightarrow \Delta F \leq 0,$$

όπου $F \equiv E - TS$ είναι η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz του συστήματος A στη σταθερή θερμοκρασία T.



6) Θεωρούμε έναν αριθμό συστημάτων A, B, C, D, ..., τα οποία είναι σχεδόν ανεξάρτητα μεταξύ τους. Υποθέτουμε ότι η μεταξύ τους αλληλεπίδραση είναι τόσο ασθενής, ώστε μπορούν να θεωρηθούν ως ένα σύνθετο σύστημα $A+B+C+D+\dots$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση επιμερισμού $Z_{A+B+C+D+\dots}$ και η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz

$F_{A+B+C+D+\dots}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$Z_{A+B+C+D+\dots} = Z_A Z_B Z_C Z_D \dots, \quad F_{A+B+C+D+\dots} = F_A + F_B + F_C + F_D + \dots$$

Η ενέργεια της κβαντικής κατάστασης l του συστήματος A είναι $E_{A,l}$, όπου $l = 1, 2, 3, \dots$

Η συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος A είναι $Z_A = \sum \exp(-\beta E_{A,l})$.

Αντιστοίχως για το σύστημα B: $E_{B,m}$, όπου $m = 1, 2, 3, \dots$

Η συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος B είναι $Z_B = \sum \exp(-\beta E_{B,m})$.

Τα συστήματα A, B, C, D, ... είναι σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία T.

Επειδή τα συστήματα A, B, C, D, ... είναι σχεδόν ανεξάρτητα, η κβαντική κατάσταση του συστήματος $\{A + B + C + D + \dots\}$ καθορίζεται από τον προσδιορισμό των κβαντικών καταστάσεων του κάθε υποσυστήματος A, B, C, D, ..., δηλαδή (l, m, \dots) όπου τα l, m, \dots παίρνουν τις τιμές 1, 2, ..., ανεξάρτητα το ένα από τα άλλα.

Τότε, $E \approx E_{A,l} + E_{B,m} + E_{C,n} + \dots$

Συνεπώς,

$$Z_{A+B+C+\dots} = \sum \sum \sum \dots \exp(-\beta [E_{A,l} + E_{B,m} + E_{C,n} + \dots]) = \\ = (\sum \exp(-\beta E_{A,l})) (\sum \exp(-\beta E_{B,m})) (\sum \exp(-\beta E_{C,n})) \dots$$

Άρα,

$$Z_{A+B+C+\dots} = Z_A Z_B Z_C \dots$$

Η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz είναι $F = -k_B \ln Z$.

$$F_{A+B+C+\dots} = -k_B \ln Z_{A+B+C+\dots} = -k_B (\ln Z_A + \ln Z_B + \ln Z_C + \dots) = \\ = -k_B \ln Z_A - k_B \ln Z_B - k_B \ln Z_C + \dots = \\ = F_A + F_B + F_C + \dots$$

7) Μέση ενέργεια συστήματος με δύο διακεκριμένες ενέργειες στάθμες. Ανωμαλία Schottky της ειδικής θερμότητας Ένα σύστημα αποτελείται από N σωματίδια με ασθενή μεταξύ τους αλληλεπίδραση και που το καθένα μπορεί να βρίσκεται είτε στη μία είτε στην άλλη από τις δύο καταστάσεις με αντίστοιχες ενέργειες ϵ_1 και ϵ_2 , όπου $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Να βρείτε τη μέση ενέργεια $E(T)$ και τη θερμοχωρητικότητα $C_V(T)$ του συστήματος. Να βρείτε τις οριακές τιμές της μέσης ενέργειας και της θερμοχωρητικότητας στα δρια των πολύ χαμηλών και των πολύ υψηλών θερμοκρασιών. Να δείξετε ότι η $C_V(T)$ παρουσιάζει ένα μέγιστο, και να βρείτε την τιμή της T που αυτό παρατηρείται. Να σχεδιάσετε τις $E(T)$ και $C_V(T)$. * Η συμπεριφορά της θερμοχωρητικότητας που βρήκαμε ονομάζεται ανωμαλία Schottky.

Η συνάρτηση επιμερισμού για το ένα σωματίδιο, όταν έχουμε δύο προσιτές καταστάσεις, είναι $\zeta = \exp(-\beta\epsilon_1) + \exp(-\beta\epsilon_2)$.

Η πιθανότητα να βρίσκεται ένα σωματίδιο σε κάθε μία από τις προσιτές του καταστάσεις είναι:

$$P_1 = [\exp(-\beta\epsilon_1)]/\zeta, \quad P_2 = [\exp(-\beta\epsilon_2)]/\zeta. \quad (P_1 + P_2 = 1).$$

Επειδή τα σωματίδια έχουν αμελητέα αλληλεπίδραση, η συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος των N σωματιδίων, Z είναι $Z = \zeta^N = [\exp(-\beta\epsilon_1) + \exp(-\beta\epsilon_2)]^N$

Μέση ενέργεια του συστήματος:

$$\text{Για το ένα σωματίδιο, } \langle \epsilon \rangle = \{\epsilon_1 \exp(-\beta\epsilon_1) + \epsilon_2 \exp(-\beta\epsilon_2)\}/\zeta$$

$$\text{Για τα } N \text{ σωματίδια, } \langle E \rangle = N \langle \epsilon \rangle = N [\{\epsilon_1 \exp(-\beta\epsilon_1) + \epsilon_2 \exp(-\beta\epsilon_2)\}/\zeta]$$

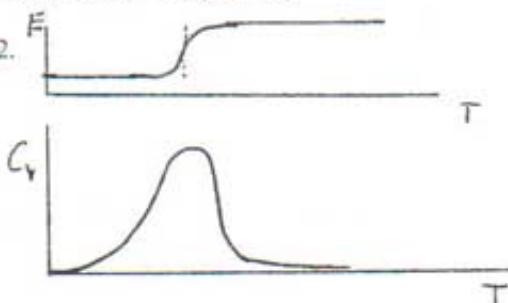
Άλλος τρόπος:

$$\langle E \rangle = -\partial \ln Z / \partial \beta = - (1/Z) \partial Z / \partial \beta = - n [1/\zeta^N] N \zeta^{N-1} \{-\epsilon_1 \exp(-\beta\epsilon_1) - \epsilon_2 \exp(-\beta\epsilon_2)\} = = N [-\epsilon_1 \exp(-\beta\epsilon_1) - \epsilon_2 \exp(-\beta\epsilon_2)] / \zeta \quad (= N \langle \epsilon \rangle)$$

Ορίζουμε $\Delta\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1$, ($\Delta\epsilon > 0$). Τότε, $\langle E \rangle = N (\epsilon_1 + \epsilon_2 \exp(-\beta\Delta\epsilon)) / (1 + \exp(-\beta\Delta\epsilon))$

Καθώς $T \rightarrow 0$, ($\beta \rightarrow \infty$), $e^{-\beta\Delta\epsilon} \rightarrow 0$, και $\langle E \rangle \rightarrow N\epsilon_1$

Και για $T \rightarrow \infty$, ($\beta \rightarrow 0$), $e^{-\beta\Delta\epsilon} \rightarrow 1$ και $\langle E \rangle \rightarrow N(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2$.



$$(\gamma) C(T) = \partial \langle E \rangle / \partial T = (\partial \langle E \rangle / \partial \beta)(\partial \beta / \partial T) = \beta^2 N k_B (\Delta\epsilon)^2 \exp(-\beta\Delta\epsilon) / [(1 + \exp[-\beta\Delta\epsilon])^2]$$

(όπου $\beta = (k_B T)$)

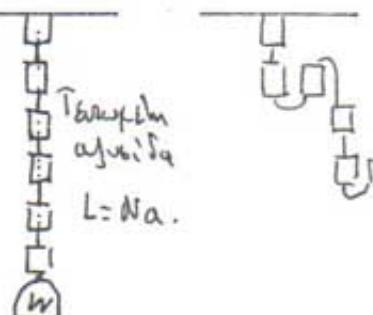
Καθώς $T \rightarrow 0$, ($\beta \rightarrow \infty$),

$$C(T \rightarrow 0) = C(\beta \rightarrow \infty) \approx N k_B (\Delta\epsilon)^2 \beta^2 e^{-\beta\Delta\epsilon} \rightarrow 0.$$

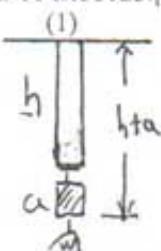
Καθώς $T \rightarrow \infty$, ($\beta \rightarrow 0$),

$$C(T \rightarrow \infty) = C(\beta \rightarrow 0) \approx N k_B (\Delta\epsilon)^2 \beta^2 \rightarrow 0.$$

8) Ελαστικές ιδιότητες του καυστσούκ Μια ταινία από καυστσούκ, που βρίσκεται σε απόλυτη θερμοκρασία T , είναι στερεωμένη στο ένα άκρο της από ένα άγκιστρο. Από το άλλο άκρο της κρεμάει ένα βάρος W . Θεωρούμε ότι το παρακάτω αολό μικροσκοπικό μοντέλο περιγράφει την ταινία: Θεωρούμε ότι η ταινία αποτελείται από μία πολυμερή αλυσίδα με N τμήματα που συνδέονται άκρο με άκρο. Κάθε τμήμα έχει μήκος a και μπορεί να προσανατολιστεί είτε παράλληλα, είτε αντιπαράλληλα ως προς την κατακόρυφο. Να βρεθεί μία έκφραση για το τελικό μέσο μήκος L ως συνάρτηση των βάρων W : (Αγνοούμε τις κινητικές ενέργειες και τα βάρη των ίδιων των τμημάτων, όπως και κάθε αλληλεπίδραση μεταξύ τους).



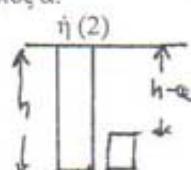
Έστω σε απόσταση h (από την κορυφή) ένα τμήμα με μήκος a :



Δυναμική ενέργεια (στο a)

$$U_1 = -W(h+a)$$

$$P_1 = P_2 = C \exp(-\beta U_1) = C \exp(\beta W(h+a))$$



Δυναμική ενέργεια (στο a)

$$U_2 = -W(h-a)$$

$$P_2 = P_1 = C \exp(-\beta U_2) = C \exp(\beta W(h-a))$$

Για το τμήμα αυτό της ταινίας (a), υπάρχουν μόνο δύο καταστάσεις. Άρα, $P_1 + P_2 = 1$.

$$\text{Tότε, } C = [\exp(\beta W(h+a)) + \exp(\beta W(h-a))]^{-1} = [\exp(-\beta Wh)] / [\exp(\beta Wa) + \exp(-\beta Wa)].$$

Τα τμήματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, άρα το μέσο μήκος της λωρίδας τίνει $N \langle a \rangle$, όπου $\langle a \rangle$ είναι το μέσο μήκος των τμημάτων a :

$$\langle a \rangle = \alpha P_+ + (-\alpha) P_- = \dots = \alpha [\exp(\beta W a) - \exp(-\beta W a)] / [\exp(\beta W a) + \exp(-\beta W a)] = \alpha \tanh(\beta W a)$$

και

$$\langle L \rangle = N \langle a \rangle = N \alpha \tanh(\beta W a)$$

9) Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από N σωματίδια με ασθενή μεταξύ τους αλληλεπίδραση. Υποθέτουμε ότι το καθένα από τα σωματίδια αυτά μπορεί να βρίσκεται σε μία από τις τρεις καταστάσεις με ενέργειες $-e$, 0 , e ($e > 0$). (a) Να βρείτε την πιθανότητα να βρίσκεται ένα σωματίδιο στην κάθε μία από τις προσιτές του καταστάσεις. Ποια είναι η συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος; (β) Να βρείτε τη μέση ενέργεια του $\langle E \rangle$ του συστήματος, καθώς και τα όριά της για $T \rightarrow 0 K$ και για $T \rightarrow \infty$.

Η συνάρτηση επιμερισμού για το ένα σωματίδιο, όταν έχουμε τρεις προσιτές καταστάσεις, είναι $\zeta = \exp(-\beta e_1) + \exp(-\beta e_2) + \exp(-\beta e_3)$. Για το πρόβλημα, έχουμε $e_1 = -e$, $e_2 = 0$, $e_3 = e$, ($e > 0$) και τότε $\zeta = \exp(\beta e) + 1 + \exp(-\beta e) = 1 + 2 \cosh(\beta e)$. Η πιθανότητα να βρίσκεται ένα σωματίδιο σε κάθε μία από τις προσιτές του καταστάσεις είναι:

$$P_1 = [\exp(-\beta e_1)]/\zeta = [\exp(\beta e)]/\zeta, \quad P_2 = [\exp(-\beta e_2)]/\zeta = 1/\zeta, \quad P_3 = [\exp(-\beta e_3)]/\zeta = [\exp(-\beta e)]/\zeta.$$

($P_1 + P_2 + P_3 = 1$).

Επειδή τα σωματίδια έχουν αμελητέα αλληλεπίδραση, η συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος των N σωματιδίων, Z είναι $Z = \zeta^N = [\exp(\beta e) + 1 + \exp(-\beta e)]^N = [1 + 2 \cosh(\beta e)]^N$

Μέση ενέργεια του συστήματος:

Για το ένα σωματίδιο,

$$\langle e \rangle = \{e_1 \exp(-\beta e_1) + e_2 \exp(-\beta e_2) + e_3 \exp(-\beta e_3)\}/\zeta = \{-e e^{\beta e} + 0 + e e^{-\beta e}\}/(1 + 2 \cosh(\beta e)) = -e \{\sinh(\beta e)\}/\{1 + 2 \cosh(\beta e)\}.$$

$$\text{Για τα } N \text{ σωματίδια, } \langle E \rangle = N \langle e \rangle = -N e \{\sinh(\beta e)\}/\{1 + 2 \cosh(\beta e)\}.$$

$$\text{Άλλος τρόπος: } \langle E \rangle = -\partial \ln Z / \partial \beta = -(1/Z) \partial Z / \partial \beta = [1/\zeta^N] N \zeta^{N-1} (e^{\beta e} + 0 - e^{-\beta e}) = -N e \{e^{\beta e} - e^{-\beta e}\}/\zeta = -N e \{\sinh(\beta e)\}/\{1 + 2 \cosh(\beta e)\}.$$

Καθώς $T \rightarrow 0$, ($\beta \rightarrow \infty$), $\langle E \rangle \rightarrow -N \langle e \rangle$

Και για $T \rightarrow \infty$, ($\beta \rightarrow 0$), $\langle E \rangle \rightarrow -N \langle e \rangle (1-1)/(1+1+1) \rightarrow 0$.

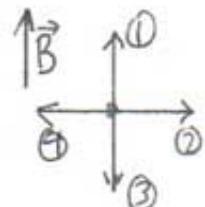
10) Θεωρούμε ένα παραμαγνητικό υλικό που περιέχει N άτομα με μαγνητικές ροπές μ_0 . Αυτές οι μαγνητικές ροπές μπορούν να έχουν τέσσερις δυνατότητες προσανατολισμούς, στο ίδιο επίπεδο, όπως δείχνει το σχήμα. Δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των άτομων του υλικού αυτού.

(a) Να υπολογίσετε την ενέργεια ενός τέτοιου άτομου για κάθε μία από τις παραπάνω καταστάσεις, όταν το υλικό βρίσκεται σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $B = B_y$.

Το παραμαγνητικό υλικό βρίσκεται σε ισορροπία σε θερμοκρασία T και σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $B = B_y$. Για την περίπτωση αυτή:

(β) Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος των N άτομων.

(γ) Να υπολογίσετε τη μέση ενέργεια ανά άτομο, καθώς και τις οριακές τιμές της για $T \rightarrow 0 K$ και $T \rightarrow \infty$. Για $N = 300$ άτομα, να βρείτε πόσα άτομα καταλαμβάνουν κάθε μία από τις προσιτές τους καταστάσεις του συστήματος για $T \rightarrow 0 K$ και για $T \rightarrow \infty$.



$$(a) E_i = -\vec{\mu}_i \cdot \vec{B}$$

$$E_1 = -\mu_0 \hat{y} \cdot B \hat{y} = -\mu_0 B, \quad E_2 = -\mu_0 \hat{x} \cdot B \hat{y} = 0, \quad E_3 = -(-\mu_0 \hat{y} \cdot B \hat{y}) = \mu_0 B, \quad E_4 = -(-\mu_0 \hat{x} \cdot B \hat{y}) = 0$$

(Κατάσταση \uparrow : $E_1 = -\mu_0 B$) (Κατάσταση \downarrow : $E_2 = 0$) (Κατάσταση \rightarrow : $E_3 = \mu_0 B$) (Κατάσταση \leftarrow : $E_4 = 0$)

$$(β) \zeta = \sum \exp(-\beta E_i) = \exp(\beta \mu_0 B) + \exp(0) + \exp(-\beta \mu_0 B) + \exp(0) = 2 + \exp(\beta \mu_0 B) + \exp(-\beta \mu_0 B)$$

Άρα, η συνάρτηση επιμερισμού για ένα άτομο είναι

$$\zeta = 2 + \exp(\beta \mu_0 B) + \exp(-\beta \mu_0 B) = 2[1 + \cosh(\beta \mu_0 B)]$$

Για το σύστημα των N μη αλληλεπιδρώντων άτομων, η συνάρτηση επιμερισμού είναι

$$Z = \zeta^N = [2 + \exp(\beta \mu_0 B) + \exp(-\beta \mu_0 B)]^N = 2^N [1 + \cosh(\beta \mu_0 B)]^N$$

$$(γ) \langle e \rangle = -\partial \ln \zeta / \partial \beta = -[\mu_0 B \exp(\beta \mu_0 B) - \mu_0 B \exp(-\beta \mu_0 B)]/[2 + \exp(\beta \mu_0 B) + \exp(-\beta \mu_0 B)] = -\mu_0 \{[\exp(\beta \mu_0 B) - \exp(-\beta \mu_0 B)]/[2 + \exp(\beta \mu_0 B) + \exp(-\beta \mu_0 B)]\} = -\mu_0 \{[\sinh(\beta \mu_0 B)]/[1 + \cosh(\beta \mu_0 B)]\}$$

Άλλος τρόπος: $\langle E \rangle = \sum E_i P_i = \sum [E_i \exp(-\beta E_i)]/\zeta = \dots$
όπου $P_i = [\exp(-\beta E_i)]/\zeta$

Στο όριο $T \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow \infty$):

$$\exp(\beta \mu_0 B) \rightarrow \infty, \exp(-\beta \mu_0 B) \rightarrow 0, \zeta = [\exp(\beta \mu_0 B)] [1 + 2 \exp(-\beta \mu_0 B) + \exp(-2 \beta \mu_0 B)] \rightarrow \infty$$

Τότε,

$$P_1 = [\exp(-\beta E_i)]/\zeta = [\exp(\beta \mu_o B)]/\zeta \rightarrow 1, P_2 = P_3 = P_4 = 1/\zeta \rightarrow 0, \text{ και } \langle \varepsilon \rangle \rightarrow -\mu_o B$$

Στο όριο $T \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0$):

$$\exp(\pm \beta \mu_o B) \rightarrow 1, \zeta \rightarrow 4. \text{ Τότε, } P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1/4 \text{ και } \langle \varepsilon \rangle \rightarrow 0$$

$$\text{Αν } N=300 \quad N_i = NP_i$$

$$T=0 K \quad N_1 = 300/4 = 75, N_2 = N_3 = N_4 = 0 \quad \text{Όλα τα ιόντα βρίσκονται στην κατάσταση 1.}$$

$$T \rightarrow \infty \quad N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 75 \quad \text{Τα άτομα είναι ισομοιφασμένα (από 75 στην κάθε κατάσταση)}$$

11) Θεωρούμε ένα σύστημα που απαρτίζεται από ζεύγος δύο ατόμων A και B με μαγνητικές ροπές μ_A και μ_B αντιστοίχως. Αυτές οι μαγνητικές ροπές μπορούν να έχουν δύο δυνατούς προσανατολισμούς. (Όταν υπάρχει εξωτερικό μαγνητικό πεδίο η κάθε μαγνητική ροπή θα είναι παράλληλη ή αντιπαράλληλη σε αυτό.). Τα δύο άτομα αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Η ενέργεια αλληλεπίδρασης είναι $-\lambda \mu_A \cdot \mu_B$ όπου $\lambda > 0$.

Οι δύο μαγνητικές ροπές έχουν το ίδιο μέτρο: $|\mu_A| = |\mu_B| = \mu_o$

Το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία σε θερμοκρασία T και σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $B = B_y$. Για την περίπτωση αυτή:

(α) Να υπολογίσετε την ενέργεια του συστήματος για κάθε μία από τις δυνατές καταστάσεις.

(β) Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος.

(γ) Να υπολογίσετε τη μέση ενέργεια του συστήματος.

(δ) Για την περίπτωση που έχουμε 1000 ζεύγη τα οποία δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, να περιγράψετε με ποιον τρόπο κατανέμονται όταν $T \rightarrow 0 K$, για τις περιπτώσεις (i) $B = 0$ και (ii) $B = (1/2) \lambda \mu_o$.

$$\vec{B} = B \hat{y} \quad \mu_i: (\mu_{oy} \hat{i} - \mu_{ox} \hat{j})$$

$$(α) E_i = -\mu_A \cdot B - \mu_B \cdot B = -\lambda \mu_A \cdot \mu_B$$

$$\text{Κατάσταση } \uparrow\uparrow \quad \mu_A = \mu_B = \mu_o \hat{y} \quad E_{\uparrow\uparrow} = -2\mu_o B - \lambda \mu_o^2$$

$$\text{Κατάσταση } \uparrow\downarrow \quad \mu_A = \mu_o \hat{y}, \mu_B = -\mu_o \hat{y} \quad E_{\uparrow\downarrow} = \lambda \mu_o^2$$

$$\text{Κατάσταση } \downarrow\uparrow \quad \mu_A = -\mu_o \hat{y}, \mu_B = \mu_o \hat{y} \quad E_{\downarrow\uparrow} = \lambda \mu_o^2$$

$$\text{Κατάσταση } \downarrow\downarrow \quad \mu_A = \mu_B = -\mu_o \hat{y} \quad E_{\downarrow\downarrow} = 2\mu_o B - \lambda \mu_o^2$$

(β) Συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος:

$$\zeta = \exp(-\beta E_{\uparrow\uparrow}) + \exp(-\beta E_{\uparrow\downarrow}) + \exp(-\beta E_{\downarrow\uparrow}) + \exp(-\beta E_{\downarrow\downarrow}) =$$

$$\exp[\beta(2\mu_o B + \lambda \mu_o^2)] + 2\exp[-\beta \lambda \mu_o^2] + \exp[-\beta(2\mu_o B - \lambda \mu_o^2)] =$$

$$[\exp(\beta \lambda \mu_o^2)] [\exp(2\beta \mu_o B) + \exp(-2\beta \mu_o B)] + 2\exp(-\beta \lambda \mu_o^2) =$$

$$2 \{ [\exp(\beta \lambda \mu_o^2)] [\cosh(2\beta \mu_o B) + \exp(-\beta \lambda \mu_o^2)] \}$$

$$\boxed{\zeta = 2 \{ [\exp(\beta \lambda \mu_o^2)] [\cosh(2\beta \mu_o B) + \exp(-\beta \lambda \mu_o^2)] \}}$$

$$(γ) P_{\uparrow\uparrow} = [\exp(-\beta E_{\uparrow\uparrow})]/\zeta = \{ \exp[\beta(2\mu_o B + \lambda \mu_o^2)] \}/\zeta, P_{\uparrow\downarrow} = P_{\downarrow\uparrow} = [\exp(-\beta \lambda \mu_o^2)]/\zeta$$

$$P_{\downarrow\downarrow} = [\exp(-\beta E_{\downarrow\downarrow})]/\zeta = \{ \exp[-\beta(2\mu_o B - \lambda \mu_o^2)] \}/\zeta,$$

$$\langle \varepsilon \rangle = (E_{\uparrow\uparrow} P_{\uparrow\uparrow} + P_{\uparrow\downarrow} E_{\uparrow\downarrow} + P_{\downarrow\uparrow} E_{\downarrow\uparrow} + P_{\downarrow\downarrow} E_{\downarrow\downarrow})/\zeta = \dots =$$

$$\{-[4\mu_o B \sinh(2\beta \mu_o B) + 2\lambda \mu_o^2 \cosh(2\beta \mu_o B)] [\exp(\beta \lambda \mu_o^2) + 2\lambda \mu_o^2 [\exp(-\beta \lambda \mu_o^2)]]\}/\zeta$$

Άλλος τρόπος: $\langle \varepsilon \rangle = -\partial \ln \zeta / \partial \beta = \dots$

$$\boxed{\langle \varepsilon \rangle = \{-[4\mu_o B \sinh(2\beta \mu_o B) + 2\lambda \mu_o^2 \cosh(2\beta \mu_o B)] [\exp(\beta \lambda \mu_o^2) + 2\lambda \mu_o^2 [\exp(-\beta \lambda \mu_o^2)]]\}/\zeta}$$

$$(δ) (I) B=0 \quad E_{\uparrow\uparrow} = E_{\downarrow\downarrow} = -\lambda \mu_o^2 \quad E_{\uparrow\downarrow} = E_{\downarrow\uparrow} = \lambda \mu_o^2$$

$$\zeta = 2 \{ [\exp(\beta \lambda \mu_o^2)] + [\exp(-\beta \lambda \mu_o^2)] \}$$

$$P_{\uparrow\uparrow} = P_{\downarrow\downarrow} = [\exp(\beta \lambda \mu_o^2)]/\zeta \quad \text{Στο όριο } T \rightarrow 0 \text{ } (\beta \rightarrow \infty), P_{\uparrow\uparrow} = P_{\downarrow\downarrow} \rightarrow 1/2$$

$$P_{\uparrow\downarrow} = P_{\downarrow\uparrow} = [\exp(-\beta \lambda \mu_o^2)]/\zeta \quad \text{Στο όριο } T \rightarrow 0 \text{ } (\beta \rightarrow \infty), P_{\uparrow\downarrow} = P_{\downarrow\uparrow} \rightarrow 0$$

$$\text{Άρα, στο όριο } T \rightarrow 0, \quad N_{\uparrow\uparrow} = N_{\downarrow\downarrow} = (1/2) 1000 = 500 \quad N_{\uparrow\downarrow} = N_{\downarrow\uparrow} = 0$$

$$(II) B = \lambda \mu_o/2 \quad E_{\uparrow\uparrow} = -2\lambda \mu_o^2, E_{\downarrow\downarrow} = 0, E_{\uparrow\downarrow} = E_{\downarrow\uparrow} = \lambda \mu_o^2$$

$$\zeta = \{ [\exp(2\beta \lambda \mu_o^2)] + 2[\exp(-2\beta \lambda \mu_o^2)] + 1 \}$$

$$P_{\uparrow\uparrow} = P_{\downarrow\downarrow} = [\exp(2\beta \lambda \mu_o^2)]/\zeta \quad \text{Στο όριο } T \rightarrow 0, P_{\uparrow\uparrow} \rightarrow 1$$

$$P_{\uparrow\downarrow} = P_{\downarrow\uparrow} = [\exp(-2\beta \lambda \mu_o^2)]/\zeta \quad \text{Στο όριο } T \rightarrow 0, P_{\uparrow\downarrow} = P_{\downarrow\uparrow} \rightarrow 0$$

$$P_{\downarrow\downarrow} = 1/\zeta \quad \text{Στο όριο } T \rightarrow 0, P_{\downarrow\downarrow} \rightarrow 0$$

$$\text{Άρα, στο όριο } T \rightarrow 0, \quad N_{\uparrow\uparrow} = 1000, N_{\downarrow\downarrow} = N_{\uparrow\downarrow} = N_{\downarrow\uparrow} = 0$$

12) Ένα θερμικά μονωμένο χάλκινο δοχείο με μάζα 1000 gram βρίσκεται σε θερμοκρασία 60°C . Προσθέτουμε στο δοχείο 500 gram πάγου σε θερμοκρασία -20°C και απομονώνουμε. (α) Θα λυώσει όλος ο πάγος; Εάν ναι, ποια θα είναι η τελική θερμοκρασία του συστήματος; Εάν όχι, πόσος πάγος θα λυώσει; (β) Να υπολογίσετε την ολική μεταβολή στην εντροπία που θα επέλθει στο σύστημα.

Η ειδική θερμότητα του χαλκού είναι $0,418 \text{ Joules}/(\text{gram K})$, η ειδική θερμότητα του νερού είναι $4,18 \text{ Joules}/(\text{gram K})$ και η ειδική θερμότητα του πάγου είναι $2,13 \text{ Joules}/(\text{gram K})$. Για να λυώσει ένα γραμμάριο πάγου απαιτούνται 333 Joules .

(α) Για να φτάσει το χάλκινο δοχείο στους 0°C εκλύει ποσό θερμότητας $Q_{\text{Cu}} = m_{\text{Cu}} C_{\text{Cu}} (0^{\circ}\text{C} - 60^{\circ}\text{C}) = -25080 \text{ J}$.

Για να αυξηθεί η θερμοκρασία του πάγου από τους -20°C έως τους 0°C , ο πάγος απορροφά ποσό θερμότητας $Q_{\text{πάγου}} = m_{\text{πάγου}} C_{\text{πάγου}} (0^{\circ}\text{C} + 20^{\circ}\text{C}) = 21300 \text{ J}$.

Άρα, όλος ο πάγος αυξάνει τη θερμοκρασία του στους 0°C , (και παραμένει πάγος).

Περισσεύει ποσό θερμότητας $Q = 25080 \text{ J} - 21300 \text{ J} = 3780 \text{ J}$.

Το ποσό θερμότητας των 3780 J θα μετατρέψει πάγο (στους 0°C) σε νερό (στους 0°C). Συνολικά θα μετατρέψει $m = (3780 \text{ J})/(333 \text{ J}/\text{gram}) = 11,35 \text{ gram}$. Έχουμε λοιπόν, $11,35 \text{ gram}$ νερού και $488,65 \text{ gram}$ πάγου.

Το σύστημα θα ισορροπήσει στους 0°C : (Χάλκινο δοχείο στους 0°C , $488,65 \text{ gram}$ νερού στους 0°C και $11,35 \text{ gram}$ πάγου στους 0°C)

$$(\beta) \Delta S_{\text{Cu}} = m_{\text{Cu}} C_{\text{Cu}} \int_{T_1}^{T_f} \frac{dT}{T} = m_{\text{Cu}} C_{\text{Cu}} \ln(273,16/333,16) = -83,00 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\text{πάγου}} = m_{\text{πάγου}} C_{\text{πάγου}} \int_{T_1}^{T_f} \frac{dT}{T} = m_{\text{πάγου}} C_{\text{πάγου}} \ln(273,16/253,16) = 80,98 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\text{πάγου σε νερό}} = Q/273,16 = 3780 \text{ J}/273,16 \text{ K} = 13,84 \text{ J/K}$$

$$\Delta S = \Delta S_{\text{Cu}} + \Delta S_{\text{πάγου}} + \Delta S_{\text{πάγου σε νερό}} = (-83,00 + 80,98 + 13,84) \text{ J/K} = 11,82 \text{ J/K}$$

13) Ένα θερμικά μονωμένο χάλκινο δοχείο με μάζα 1000 gram βρίσκεται σε θερμοκρασία 0°C . Προσθέτουμε στο δοχείο 10 gram υδρατμών σε θερμοκρασία 100°C και απομονώνουμε. (α) Σε ποια θερμοκρασία, T_f θα φτάσει το σύστημα H_2O - χάλκινο δοχείον; (β) Να υπολογίσετε την ολική μεταβολή στην εντροπία που θα επέλθει στο σύστημα.

Η ειδική θερμότητα του χαλκού είναι $0,418 \text{ Joules}/(\text{gram K})$ και η ειδική θερμότητα του νερού είναι $4,18 \text{ Joules}/(\text{gram K})$. Για να υγροποιηθεί ένα γραμμάριο υδρατμών απαιτούνται 2259 Joules .

(α) Αρχικά: Δοχείο από Cu σε 0°C και υδρατμοί σε 100°C .

Για να υγροποιηθούν οι υδρατμοί θα εκλύσουν ποσό θερμότητας,

$$Q_{\text{υγροποίησης}} = Q_{\text{υδρατμοί}} = (10\text{g})(2259 \text{ J/g}) = 22590 \text{ J}$$

Αυτό το ποσό θερμότητας θα απορροφηθεί από το χάλκινο δοχείο, ανεβάζοντας τη θερμοκρασία του στους $T_{1,\text{Cu}}^{\circ}\text{C}$.

$$22590 \text{ J} = m_{\text{Cu}} C_{\text{Cu}} (T_1 - 0) = (1000\text{g}) (0,418 \text{ J/g}) T_{1,\text{Cu}}$$

$$\text{Άρα, } T_{1,\text{Cu}} = 22590/418 = 54,04^{\circ}\text{C}$$

Σ' αυτή την ενδιάμεση κατάσταση, το δοχείο βρίσκεται στους $54,04^{\circ}\text{C}$ και το νερό (υδρατμοί που υγροποιήθηκαν) στους 100°C .

Για να ισορροπήσει το σύστημα: $m_{\text{Cu}} C_{\text{Cu}} (T_f - T_{1,\text{Cu}}) + m_{\text{νερού}} C_{\text{νερού}} (T_f - 100^{\circ}\text{C}) = 0$
 $(1000)(0,418)(T_f - 22590/418) + (10)(4,18)(T_f - 100) = 0$

Άρα,

$$T_f = 58,22^{\circ}\text{C}$$

ΑΡΧΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ	ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ	ΤΕΛΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

$$(\beta) \Delta S_{\text{Cu}} = \int_{T_1}^{T_f} m_{\text{Cu}} C_{\text{Cu}} dT/T = 4,18 \ln(331,22/273) = 80,80 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\text{νερού}} = \int_{T_1}^{T_f} m_{\text{νερού}} C_{\text{νερού}} dT/T = 41,8 \ln(331,22/373) = -4,97 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\text{υγροποίησης}} = -22590/373 = -60,56 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\text{ολική}} = \Delta S_{\text{Cu}} + \Delta S_{\text{νερού}} + \Delta S_{\text{συμπύκνωσης}} = 14,27 \text{ J/K}$$

- 14) Μεταβολές της εντροπίας κατά τις ανταλλαγές θερμότητας** (α) Ένα χιλιόγραμμο νερού σε θερμοκρασία 0°C έρχεται σε επαφή με μία μεγάλη δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία 100°C . Όταν το νερό φτάσει τη θερμοκρασία των 100°C , ποια θα είναι η μεταβολή στην εντροπία του νερού και η μεταβολή στην εντροπία της δεξαμενής θερμότητας; Ποια θα είναι η μεταβολή στην εντροπία του ολικού συστήματος (δεξαμενή θερμότητας και νερό);
 (β) Εάν το νερό θερμαίνοταν από τους 0°C στους 100°C φέρνοντάς το πρώτα σε επαφή με μία δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία 50°C και ώστε με μία δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία 100°C , ποια θα ήταν η μεταβολή της εντροπίας του ολικού συστήματος; (γ) Να δείξετε με ποιον τρόπο θα έπρεπε να θερμανθεί το νερό από τους 0°C στους 100°C , χωρίς να μεταβληθεί η εντροπία του ολικού συστήματος.

Η ολική ενέργεια $E_A + E_B$ είναι σταθερή. $\Delta E_A + \Delta E_B = 0$

$$S^{(0)}_{\text{νερού}} - S^{(0)}_{\text{νερού}} = \Delta S_{\text{νερού}} = \int dQ/T = \int m_p C_p dT/T = m_{\text{νερού}} C_{\text{νερού}} \ln(T_f/T_i) = \\ = (1000 \text{gram}) (4,18 \text{ J/gram K}) \ln(373/273) = 1304,6 \text{ J/K}$$

Το νερό απορρόφησε θερμότητα $\Delta Q = m_{\text{νερού}} C_{\text{νερού}} \Delta T = 4,18 \times 10^3 \text{ J}$

Η δεξαμενή έχασε αυτή την ποσότητα θερμότητας σε σταθερή θερμοκρασία T .

Άρα, $\Delta S_{\text{δεξαμενής}} = -\Delta Q/T = -4,18 \times 10^3 \text{ J}/373 \text{ K} = -1120,6 \text{ J/K}$

Άρα, $\Delta S_{\text{συστήματος}} = \Delta S_{\text{νερού}} + \Delta S_{\text{δεξαμενής}} = 1304,6 \text{ J/K} - 1120,6 \text{ J/K} = 184 \text{ J/K}$

(β) Το νερό έρχεται πρώτα σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας στους 50°C .

Το νερό απορροφά ποσό θερμότητας:

$$\Delta Q_{\text{νερού}} = m_{\text{νερού}} C_{\text{νερού}} \Delta T = (1000 \text{gram}) (4,18 \text{ J/gram K}) (50 \text{ K}) = 209000 \text{ J}$$

Συνεπώς, η δεξαμενή αυτή χάνει ποσό θερμότητας:

$$\Delta Q_{\text{δεξαμενής στους } 50^{\circ}\text{C}} = -\Delta Q_{\text{νερού}} = -209000 \text{ J}$$

Και η μεταβολή στην εντροπία της δεξαμενής αυτής είναι:

$$\Delta S_{\text{δεξαμενής στους } 50^{\circ}\text{C}} = (\Delta Q_{\text{δεξαμενής στους } 50^{\circ}\text{C}})/T = -209000/323 = -647,06 \text{ J/K.}$$

Το νερό τώρα έρχεται σε επαφή με δεξαμενή στους 100°C .

Το νερό απορροφά ποσό θερμότητας:

$$\Delta Q_{\text{νερού}} = m_{\text{νερού}} C_{\text{νερού}} \Delta T = (1000 \text{gram}) (4,18 \text{ J/gram K}) (50 \text{ K}) = 209000 \text{ J}$$

Συνεπώς, η δεξαμενή αυτή χάνει ποσό θερμότητας:

$$\Delta Q_{\text{δεξαμενής στους } 100^{\circ}\text{C}} = -\Delta Q_{\text{νερού}} = -209000 \text{ J}$$

Και η μεταβολή στην εντροπία της δεξαμενής αυτής είναι:

$$\Delta S_{\text{δεξαμενής στους } 100^{\circ}\text{C}} = \Delta Q_{\text{δεξαμενής στους } 100^{\circ}\text{C}}/T = -209000/373 = -560,32 \text{ J/K.}$$

Συνολικά,

$$\Delta S_{\text{δεξαμενής}} = \Delta S_{\text{δεξαμενής στους } 50^{\circ}\text{C}} + \Delta S_{\text{δεξαμενής στους } 100^{\circ}\text{C}} = -(647,06 + 560,32) \text{ J/K} = \\ = -1207,38 \text{ J/K.}$$

Για το νερό, η $\Delta S_{\text{νερού}}$ παραμένει η ίδια. Άρα, για όλο το σύστημα,

$$\Delta S = \Delta S_{\text{νερού}} + \Delta S_{\text{δεξαμενής}} = (1304,6 - 1207,4) \text{ J/K} = 97,2 \text{ J/K},$$

μικρότερη από την περίπτωση (α).
 (γ) Εάν το σύστημα παραμένει σε ισορροπία σε καθε βήμα, δηλαδή εάν το φέρνουμε διαδοχικά σε επαφή με μεγάλο αριθμό δεξαμενών θερμότητας με $T_1 = 0^{\circ}\text{C}$, T_2 , T_3 , T_4, \dots , $T_N = 100^{\circ}\text{C}$, τότε $\Delta S \rightarrow 0$ ($\Delta S_{\text{δεξαμενών}} \rightarrow \Delta S_{\text{νερού}}$).

- 15) Η εντροπία κατά την τήξη** Πάγος και νερό συνυπάρχουν σε ισοποκία στη θερμοκρασία 0°C . Για να λυώσει ένα γραμμομόριο (mol) πάγου απαιτείται ποσό θερμότητας 6000 joules . (α) Να υπολογίσετε τη διαφορά εντροπίας μεταξύ ενός γραμμομορίου νερού και ενός γραμμομορίου πάγου σε θερμοκρασία 0°C . (β) Να βρείτε το λόγο του αριθμού των προσιτών καταστάσεων του νερού προς τον αριθμό των προσιτών καταστάσεων του πάγου στην ίδια θερμοκρασία.

Στους $T = 0^{\circ}\text{C}$ ($= 273,15 \text{ K}$):

$$(α) \Delta S = S_{\text{νερού}} - S_{\text{πάγου}} = \Delta Q/T = 6000/273,15 = 21,97 \text{ Joules/Kelvin.}$$

(β) $S = k_B \ln \Omega$. Άρα,

$$\Delta S = k_B \ln \Omega_{\text{νερού}} - k_B \ln \Omega_{\text{πάγου}} = k_B \ln (\Omega_{\text{νερού}} / \Omega_{\text{πάγου}}) = 21,97 \text{ Joules/Kelvin.}$$

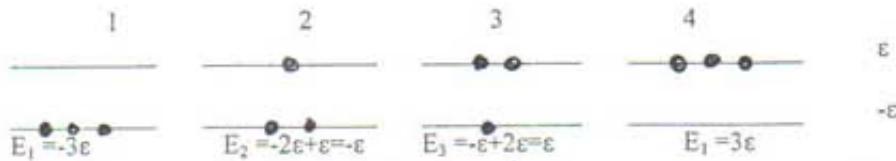
$$\text{Tότε, } (\Omega_{\text{νερού}} / \Omega_{\text{πάγου}}) = \exp(\Delta S/k_B) = \exp(21,97/1,38 \times 10^{-23}) = \exp(15,9 \times 10^{24}) \approx 10^a.$$

Οπου $a \approx 6,8 \times 10^{24}$.

Παρατηρούμε ότι

$$\Omega_{\text{νερού}} >> \Omega_{\text{πάγου}}$$

Θεωρήστε ένα σύστημα που αποτελείται από τρία πανομοιότυπα σωματίδια που ακολουθούν τη στατιστική Bose – Einstein. Κάθε ένα από τα σωματίδια μπορεί να βρίσκεται σε μία από δύο κβαντικές καταστάσεις με αντίστοιχες ενέργειες $\epsilon_1 = -\varepsilon$, $\epsilon_2 = \varepsilon$, ($\varepsilon > 0$). Το σύστημα βρίσκεται σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία T . (a) Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού (β) Να βρείτε την πιθανότητα κατάληψης της κάθε κατάστασης του συστήματος. (γ) Να υπολογίσετε τη μέση ενέργεια του συστήματος, καθώς και τις οριακές τιμές της για $T \rightarrow 0$ K και $T \rightarrow \infty$. Να περιγράψετε το σύστημα σε κάθε μία από τις δύο οριακές περιπτώσεις.



$$\zeta = \sum \exp(-\beta E_i) = \exp(3\beta\varepsilon) + \exp(\beta\varepsilon) + \exp(-\beta\varepsilon) + \exp(-3\beta\varepsilon)$$

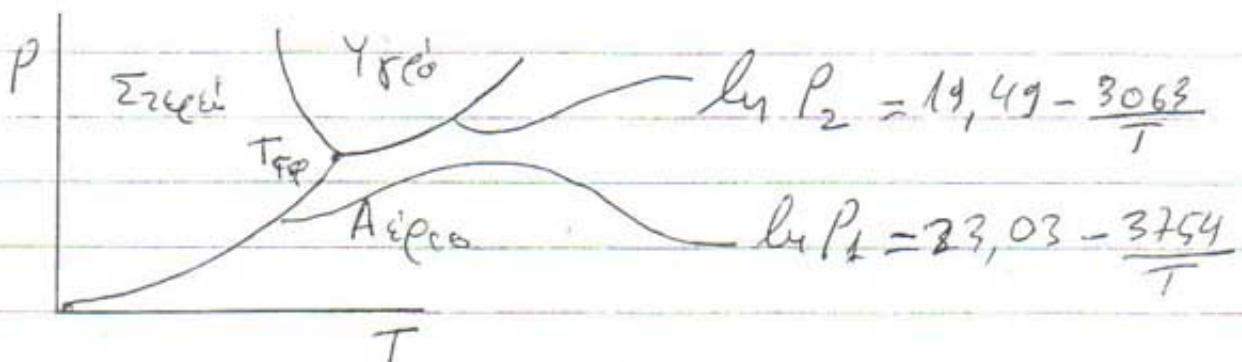
$$P_1 = [\exp(-\beta E_1)]/\zeta \quad P_2 = [\exp(3\beta\varepsilon)]/\zeta \quad P_3 = [\exp(-\beta\varepsilon)]/\zeta \quad P_4 = [\exp(-3\beta\varepsilon)]/\zeta$$

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{\partial \ln \zeta}{\partial \beta} = -\left\{ [3 \exp(3\beta\varepsilon) + \exp(\beta\varepsilon) - \exp(-\beta\varepsilon) - 3 \exp(-3\beta\varepsilon)]/\zeta \right\} \varepsilon = \\ -\left\{ [3 \sinh(3\beta\varepsilon) + \sinh(\beta\varepsilon)]/[\cosh(3\beta\varepsilon) + \cosh(\beta\varepsilon)] \right\} \varepsilon$$

Στο δριό $T \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow \infty$): $\zeta \rightarrow e^{3\beta\varepsilon} \rightarrow \infty$
και άρα $P_1 \rightarrow 1$, $P_2 = P_3 = P_4 \rightarrow 0$, $\langle \varepsilon \rangle \rightarrow -3\varepsilon$

Στο δριό $T \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0$): $\zeta \rightarrow 4$
και άρα $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 \rightarrow 1/4$ $\langle \varepsilon \rangle \rightarrow -\{[3+1-1-3]/4\}\varepsilon = 0$

- 3) Η πίεση ατμών P (σε mm Hg) της στερεάς αμμωνίας δίνεται από τη σχέση $\ln P_1 = 23,03 - \frac{3754}{T}$ και η αντίστοιχη της αμμωνίας σε υγρή μορφή από τη σχέση $\ln P_2 = 19,49 - \frac{3063}{T}$.
- Να βρείτε τη θερμοκρασία του τριπλού σημείου.
 - Ποιες είναι οι λανθάνουσες θερμότητες εξάχνωσης και εξαέρωσης στο τριπλό σημείο;
 - Ποια είναι η λανθάνουσα θερμότητα τήξεως στο τριπλό σημείο;



a) Σω τριπλό σημείο: $\ln P_1 = \ln P_2$

$$23,03 - \frac{3754}{T_{Tp}} = 19,49 - \frac{3063}{T_{Tc}}$$

$$23,03 - 19,49 = \frac{3754 - 3063}{T_{Tp}}$$

$$3,54 = \frac{691}{T_{Tp}} \Rightarrow \boxed{T_{ΤΡΙΠΛΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ} = 195,2 K}$$

Πίνεται αυτό το τριπλό σημείο:

$$\ln P_{ΤΡΙΠΛΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ} = 19,49 - \frac{3063}{195,2} = 3,7982$$

$$\ln P_{Σ-A} = \ln P_{Y-A} = \ln P_{ΤΡΙΠΛΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ} = 3,7982$$

($P_{Σ-A} = P_1$, $P_{Y-A} = P_2$)

Apa: $\boxed{P_{ΤΡΙΠΛΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ} = 43,76 \text{ mm Hg.}}$

b) Στα ρηματίδια Στρεψί → αριθμός και υπέρ → αίρεση (κατά την οποία προστίθενται νέα γένη):

$$(i) \frac{d}{dT} \ln P = \frac{ML_{1,2}}{RT^2}, \text{ έποιηση}$$

$L_{1,2}$ είναι η Ιανθίνουσα Δερμίνη και γραμμή

Kai M akar u jeap fotohipram tufja,
nium oxian: $\frac{d}{dT} \ln P = \frac{L'_{\text{Z}}}{RT^2}$, òsu L'_{Z}

Akar u jandivousa Depòrmau and mole.

Fia nu claisipan ($\gamma \rightarrow A$):

$$\ln P_{\gamma \rightarrow A} = 19,49 - \frac{3063}{T} \Rightarrow \frac{d}{dT} \ln P_{\gamma \rightarrow A} = \frac{3063}{T^2}$$

Fia nu alaxwan ($\varepsilon \rightarrow A$): $\ln P_{\varepsilon \rightarrow A} = 23,03 - \frac{3754}{T}$

Mendika $\frac{d}{dT} \ln P_{\varepsilon \rightarrow A} = \frac{3754}{T^2}$.

Aea, Xauiforosimur oxian $\frac{dP}{dT} = \frac{L'_{\text{Z}}}{RT^2}$
éxafe:

Fia nu claisipan ($\gamma \rightarrow A$): $\frac{L'_{\gamma \rightarrow A}}{RT^2} = \frac{3063}{T^2}$

Aea, $L'_{\gamma \rightarrow A} = 3063 R = 2,55 \times 10^{11} \text{ erg/mole}$

Fia nu alaxwan ($\varepsilon \rightarrow A$): $\frac{L'_{\varepsilon \rightarrow A}}{RT^2} = \frac{3754}{T^2}$

Aea, $L'_{\varepsilon \rightarrow A} = 3754 R = 3,12 \times 10^{11} \text{ erg/mole}$

8) Tzo zp, njo cufio: It jandivousa Depòrma
ni hews, $L'_{\text{Z} \rightarrow \gamma}$, neinu va akar u slayped
nu $L'_{\varepsilon \rightarrow A} - L'_{\gamma \rightarrow A}$, entida quloupe co ijo
on rejheta nejivones $\text{Z} \rightarrow A \rightarrow \gamma$, ònu
va arwadias $\gamma \rightarrow A$.

Aea: $L'_{\text{THEC}} = L'_{\varepsilon \rightarrow A} - L'_{\gamma \rightarrow A} = (3,12 - 2,55) \times 10^{11} \text{ erg/mole}$
 $= 5,7 \times 10^{10} \text{ erg/mole}$

L' $\text{THEC} = L'_{\varepsilon \rightarrow A} - L'_{\gamma \rightarrow A}$