ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3°

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΙΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

① Να βρείτε τις σταθερές λύσεις $w(x)$ της εξίσωσης θερμότητος με συνοριακές συνθήκες:

(α) $u(0,t)-u_x(0,t)=\theta_1$, $u(L,t)=0$, $t>0$, $L>0$.

(β) $u(0,t)=\theta_1$, $u(L,t)+u_x(L,t)=\theta_2$, $L>0$, $t>0$.

{Απάντηση: (β) $w(x)=\theta_1+(\theta_2-\theta_1)x/(1+L)$. }

② Να λυθούν τα παρακάτω Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$u_t=a^2u_{xx}\ ,\quad 0<x<1\ ,\quad t>0$$ {Υποδ: Μέθοδος Χ.Μ.}

(α) $u(0,t)=u(1,t)=0$, $t>0$, $u(x,0)=3\sin(\pi x)-5\sin(4\pi x)$, $0<x<1$.

{Απαν.: $u(x,t)=3\sin(\pi x)e^{-a^2\pi^2t}-5\sin(4\pi x)e^{-16a^2\pi^2t}$ }

(β) $u(0,t)=1$, $u(1,t)=0$, $u(x,0)=1+x$, $t>0$, $0<x<1$.

{Απαν.: $u(x,t)=1-x+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\sin(\nu\pi x)e^{-a^2\nu^2\pi^2t}$ }

(γ) $u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$, $u(x,0)=\theta_0\sin^2(\pi x/L)$

$t>0$ και $0<x<L$.

{Απαν.: $u(x,t)=\frac{1}{2}\theta_0\left[1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]e^{-4a^2\pi^2t/L^2}$ }

③ Να λυθούν τα Προβλήματα Αρχικών και Συνοριακών Τιμών (Π.Α.Σ.Τ):

(α) $u_t=u_{xx}+6x$, $0<x<1$, $t>0$

$u_x(0,t)=0$, $u(1,t)=1$, $t>0$, $u(x,0)=x^3$, $0<x<1$.

{Υποδ.: $u(x,t)=S(x)+v(x,t)$, $S''+6x=0$, $S'(0)=0$, $S(1)=1$,

Απαν.: $u(x,t)=x^3$. }

(β) $u_t=u_{xx}+2x-5\sin t$, $0<x<1$, $t>0$

$u(0,t)=u(1,t)=u(x,0)=0$, $0<x<1$, $t>0$

{Απαν.: $u(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{4}{\nu^3\pi^3}(-1)^{\nu+1}(1-e^{-\nu^2\pi^2t})-\frac{10}{\nu\pi}\frac{[1-(-1)^\nu]}{1+\nu^4\pi^4}\cdot\right.$

$\left.\cdot(\nu^2\pi^2\sin t-\cos t+e^{-\nu^2\pi^2t})\right]\sin\nu\pi x$. }

(γ) $u_t = u_{xx} + 2xt - x$, $0<x<1$, $t>0$

$u(0,t) = t^2$, $u(1,t) = 2t$, $u(x,0) = x^2/2$, $0<x<1$, $t>0$.

{Απαν.: $u(x,t) = t + (t^2 - t)x + \frac{x}{2}(x-1) + \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \sin(\nu\pi x) e^{-\nu^2\pi^2 t}$.

{Υποδ.: Για τις (β),(γ), ανάπτυξη σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων δηλ. $u(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(t) X_\nu(x)$ κ.λ.π. }

---

(4) Αν $u = u(x,t)$ λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<\infty, \ t>0, \\ u_x(0,t) = -f(t), & u(x,t) \to 0 \text{ όταν } t\to\infty, \\ u(x,0) = 0, & 0<x<\infty, \end{cases}$$

να δείξετε ότι $u(x,t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau$,

στη συνέχεια θέτοντας $z = x/2a\sqrt{t-\tau}$ να δείξετε ότι η u γράφεται: $u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2a\sqrt{t}}^{\infty} f(t - x^2/4a^2z^2) z^{-2} e^{-z^2} dz$.

---

(5) Να λυθούν τα παρακάτω προβλήματα με τη χρήση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών:

(α) $u_t = a^2 u_{xx}$, $0<x<1$, $t>0$

$u(0,t) = \theta$, $u_x(1,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $0<x<1$, $t>0$.

{Υποδ.: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh(x\sqrt{s})}{s\cosh\beta\sqrt{s}} : s\to t\right\} = 1 + \frac{4}{\nu}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu-1} \cdot$

$\cdot \cos\left[\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{\beta}\right] \exp\left[-\frac{(2\nu-1)^2\pi^2 t}{4\beta^2}\right]$. }

(β)
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0<x<\infty, \ t>0 \\ u(0,t) = 0, \ u(x,t)\to 0, \ u_x(x,t)\to 0 \text{ όταν } t\to\infty, \\ u(x,0) = f(x), & 0<x<\infty \end{cases}$$

{Υποδ.: Χρησιμοποιείστε τον Ημιτονικό μετασχηματισμό Fourier,

$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\xi) \left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right]\right\} d\xi$}

Εφαρμογή: $f(x) = 0$ για $0<x<\beta$, $f(x) = \theta$ για $x>\beta$.

⑥ Να λυθούν τα Π.Α.Σ.Τ. για την κυματική εξίσωση:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0<x<1, \; t>0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad t>0$$
$$u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = g(x), \quad 0<x<1$$

(α) $f(x)=0$, $g(x)=a$, $0<x<1$

(β) $f(x) = x(1-x)$, $g(x) = 0$ $\quad 0<x<1$

Απαν.: (α) $u(x,t) = \dfrac{4a}{c\pi^2} \displaystyle\sum_{\nu=1,\,(\text{περιττός})}^{\infty} \nu^{-2} \sin(\nu c\pi t)\sin(\nu\pi x)$

(β) $u(x,t) = \dfrac{8}{\pi^3} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-3} \cos(\nu c\pi t)\sin(\nu\pi x)$. }
(ν περιττός)

Υποδ.: Μέθοδος Χ.Μ. }

---

⑦ Να λυθούν τα Π.Α.Σ.Τ.

(α) $u_{tt} = u_{xx} + 10$, $0<x<1$, $t>0$

$u(0,t) = u_x(1,t) = 0$, $\quad t>0$

$u(x,0) = 2$, $u_t(x,0) = \sin\dfrac{3\pi x}{2}$, $\quad 0<x<1$.

{ Υποδ.: Θέσετε $u(x,t) = S(x) + v(x,t)$ κ.λ.π., Απαν.: $u(x,t) = 2 + \dfrac{2}{3\pi}\sin\left(\dfrac{3\pi t}{2}\right)\sin\dfrac{3\pi x}{2} + \dfrac{160}{\pi^3}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2\nu-1)^3}\left[1-\cos\dfrac{(2\nu-1)\pi t}{2}\right]\cdot \sin\dfrac{2\nu-1}{2}\pi x$. }

(β) $u_{tt} = c^2 u_{xx} - c^2 P\cos\omega t$, $0<x<\pi$, $t>0$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $t>0$

$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $\quad 0<x<\pi$.

{ Υποδ.: $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, v λύση του ομογενούς, w μερική λύση της μορφής $w(x,t) = Y(x)\sin\omega t + Z(x)\cos\omega t$ }

(γ) $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin x\cos t, & 0<x<\frac{\pi}{2},\; t>0 \\ u(0,t) = u\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0, & t>0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0<x<\pi/2. \end{cases}$

{ Υποδ.: Ανάπτυξη σε ημίρρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων $u(x,t) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(t)\, X_\nu(x)$ κ.λ.π. Απαν.: $u(x,t) = \frac{1}{2}x\cos x\cos t + \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^\nu \nu}{(4\nu^2-1)^2}\cos(2\nu t)\sin(2\nu x)$. }

ε) Να βρείτε τη λύση των προβλημάτων:

(α) $u_{tt} = u_{xx}$, $0<x<\infty$, $t>0$

$u_x(0,t)=0$, $u(x,t)\to 0$ όταν $x\to\infty$, $t>0$

$u(x,0)=e^{-x}$, $u_t(x,0)=0$

{Απαν.: $u(x,t) = e^{-t}\cosh x$ για $x<t$ και $u(x,t)=e^{-x}\cosh t$ για $x>t$

(β) $\begin{cases} u_{tt}=c^2 u_{xx}, & -\infty<x<\infty,\ t>0 \\ u(x,t),\ u_x(x,t)\to 0 & \text{όταν } |x|\to\infty,\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=e^{-|x|}, & x\in\mathbb{R} \end{cases}$

{Απαν.: $u(x,t)=\frac{1}{\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-isx}\sin cst}{s(s^2+1)}\,ds = \frac{2}{\pi c}\int_0^{\infty}\frac{\cos sx\sin sct}{s(s^2+1)}\,ds.$

Υποδ.: Μετασχηματισμός Fourier, ($e^{iA}=\cos A+i\sin A$).}

(γ) Να λύσετε τη (β) με χρήση του ολοκληρώματος Fourier.

---

(9) Αν η $u=u(x,t)$ είναι λύση του Π.Α.Τ.,

$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}, & -\infty<x<\infty,\ t>0 \quad (\text{ή } -\infty<t<\infty) \\ u(x,t)=u_x(x,t)\to 0 & \text{όταν } |x|\to\infty,\ t>0, \\ u(x,0)=f(x),\ u_t=(x,0)=g(x), & -\infty<x<\infty, \end{cases}$

Να δείξετε, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier, ότι

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy,\quad c>0.$$

Τύπος D' Alembert

Εφαρμογή:

(α) $f(x)=x$, $g(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(β) $f(x)=0$, $g(x)=e^{-|x|}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(γ) $f(x)=0$, $g(x)=\frac{2}{1+x^2}$, στη συνέχεια να βρείτε το $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$.

(δ) Να δείξετε ότι άρτια (περιττά) αρχικά δεδομένα παράγουν άρτιες (περιττές) λύσεις.

(10) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$u_t = 6(u_{xx}+u_{yy}),\ 0<x<2,\ 0<y<3,\ t>0$$

$$u(x,0,t)=u(x,3,t)=u(0,y,t)=u(2,y,t)=0$$

$$u(x,y,0)=4\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\sin(\pi y)-2\sin(\pi x)\sin\left(\frac{2\pi y}{3}\right)$$

{ Υποδ.: Μέθοδος Χ.Μ., ... Ιδιογένεια της $(-\Delta)$. Απαν.:

$$u(x,y,t)=4\exp\left[-\pi^2\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^2+1^2\right)6t\right]\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\sin(\pi y)-2\exp\left[-\pi^2\left(1^2+\left(\tfrac{2}{3}\right)^2\right)\cdot 6t\right]\sin(\pi x)\sin\left(\frac{2\pi y}{3}\right).\ \}$$

---

(11) Να λυθεί το πρόβλημα Σ.Τ.

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\ 0<x<3\pi,\ 0<y<2\pi,\ 0<z<1,$$

$u(x,y,0)=\sin x\sin y$ και $u=0$ στις έδρες $z=1,\ x=0,\ x=3\pi,\ y=0,\ y=2\pi$

{ Υποδ.: Μέθοδος Χ.Μ.. Απαν.: $u(x,y,z)=\dfrac{1}{\sinh(\sqrt{2})}\sin(x)\sin(y)\sinh\left(\sqrt{2}(1-z)\right).$ }

---

(12) Με τη μέθοδο της ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων, να λυθούν τα προβλήματα:

(α) $u_{xx}+u_{yy}=-1,\ 0<x<\pi,\ 0<y<1$

$u=0$ στις πλευρές $x=0,\ x=\pi,\ y=0$

$u(x,1)=\sin x$

Απαν.: $u(x,y)=\dfrac{\sinh y}{\sinh 1}\sin x+\dfrac{16}{\pi^2}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(mx)\sin(n\pi y)}{nm(m^2+n^2\pi^2)}$ (m, n περιττοί) }

(β) $u_{xx}+u_{yy}=-x,\ 0<x<\pi,\ 0<y<\pi$

$u(0,y)=u(\pi,y)=0,\ u(x,0)=1,\ u(x,\pi)=1$

{ Υποδ.: Θέστε $u=w+z$ όπου $w_{xx}+w_{yy}=-x$ και $w=0$ για $x=0,\ x=\pi,\ y=0,\ y=\pi$ ενώ $z_{xx}+z_{yy}=0$ και $z=0$ για $x=0,\pi$, $z=1$ για $y=0,\pi$.

Απαν.: $u(x,y)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sinh(ny)+\sinh(n(\pi-y))}{n\sinh(n\pi)}\sin(nx)+\dfrac{4\sin 3y}{\pi}\sum_{m=1}\dfrac{\sin(mx)}{m(m^2+9)}$ (περιττός) }

(13) Τύπος Poisson στο ημιεπίπεδο:

Αν η $u=u(x,y)$ είναι λύση του προβλήματος:

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad -\infty<x<\infty \quad , \quad 0<y<\infty$$

$u(x,0)=f(x)$, $-\infty<x<\infty$ και $u(x,y)\to 0$ όταν $x^2+y^2\to\infty$

τότε
$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)\,ds}{(s-x)^2+y^2} \quad , y>0 \quad , \text{(Poisson)}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρείτε την $u(x,y)$ αν
$$f(x)=\begin{cases}\theta & \text{για } |x|<\beta\\ 0 & \text{για } |x|>\beta.\end{cases}$$

---

(14) Τύπος Poisson για τον κυκλικό δίσκο:

Αν $u=u(r,\theta)$ είναι λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \quad , \quad 0<r<R, \quad -\pi<\theta<\pi, \\ u(R,\theta)=f(\theta) \quad , \quad -\pi<\theta<\pi \end{cases}$$

, ($u(r,\theta)$ φραγμένη όταν $r\to 0+$),

τότε η
$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}(a_\nu\cos\nu\theta+\beta_\nu\sin\nu\theta),$$

όπου τα a_ν, $\nu=0,1,2,\dots$, β_ν, $\nu=1,2,$ δίνονται από τους τύπους Euler-Fourier, μπορεί να γραφτεί και υπό τη μορφή:

$$u(r,\theta)=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u(R,\varphi)}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi \quad \text{(Poisson)}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρείτε την $u(r,\theta)$ αν

$u(R,\theta)=T$, $0<\theta<\pi$ και $u(R,\theta)=0$, $-\pi\le\theta\le 0$, $R=1$.

{Απαν.: $u(r,\theta)=T-\frac{T}{\pi}\arctan\left(\frac{2r\sin\theta}{1-r^2}\right)$, Υποδ.: θέστε $\varphi-\theta=\tan\frac{z}{2}$.}
