Θεόδωρος Αλεξόπουλος, Καθηγητής
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3019, Fax: 210 772-3025
e-mail: theoalex@central.ntua.gr

Theodoros Alexopoulos, Professor
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3019, Fax: +30 210 772-3025
e-mail: Theodoros.Alexopoulos@cern.ch
http://www.physics.ntua.gr/∼theoalex

Ανάλυση Σήματος, Εαρινό Εξάμηνο 2009-2010 - 6ο ΣΕΜΦΕ

1η σειρά ασκήσεων, Παράδοση: Τετάρτη 10/03/2010

Πρόβλημα 0.1 Θεωρούμε μια ακολουθία σημάτων $E_n^k(t)$, $t \in [0,\,1]$, η οποία περιγράφεται από τη σχέση

$$E_n^k(t) = \begin{cases} 2^{n/2} & (k-1)/2^n \le t < (k-1/2)/2^n, \\ -2^{n/2} & (k-1/2)/2^n \le t < k/2^n, \\ 0 & \text{αλλού}, \end{cases} \qquad \text{όπου} \quad k, n \in \mathbb{Z},\ 1 \le k \le 2^n,\ n \ge 0$$

(α) Να σχεδιάσετε τα σήματα $E_n^k(t)$ για $n = 0$ και $n = 1$, δηλαδή τα $E_0^1(t),\ E_1^1(t),\ E_1^2(t)$.
(β) Να δείξετε ότι τα σήματα $E_n^k(t)$ είναι ορθοκανονικά ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t, \quad \text{για δυο σήματα} \quad f(t),\ g(t)$$

Ειδικότερα να δείξετε ότι η νόρμα αυτών των σημάτων είναι 1, $\|E_n^k(t)\| = 1$, και τα γινόμενα $\langle E_n^k(t),\ E_m^l(t)\rangle = 0,\ \forall\, m,\, n,\, k,\, l$.
Τα $E_n^k(t)$ ονομάζονται συναρτήσεις Haar (χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των wavelets) και μπορούν να αποτελέσουν μια ορθοκανονική βάση στο χώρο των συνεχών και παραγωγισίμων συναρτήσεων $L^2([0,1])$.

Πρόβλημα 0.2 Για τη συνέλιξη, $x_1(t) * x_2(t)$, δυο σημάτων $x_1(t)$, $x_2(t)$ να δείξετε τον ακόλουθο πίνακα

$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t) * x_2(t)$
άρτιο	άρτιο	άρτιο
περιττό	περιττό	άρτιο
άρτιο	περιττό	περιττό
περιττό	άρτιο	περιττό

Πρόβλημα 0.3 Γνωρίσουμε ότι ένα σήμα $f(t)$ μπορεί να αναλυθεί σ' ένα άθροισμα ενός αρτίου, $f_{\mathrm{e}}(t)$, και ενός περιττού, $f_{\mathrm{o}}(t)$, σήματος

$$f(t) = \underbrace{\frac{f(t)+f(-t)}{2}}_{f_{\mathrm{e}}(t),\ \text{άρτιο}} + \underbrace{\frac{f(t)-f(-t)}{2}}_{f_{\mathrm{o}}(t),\ \text{περιττό}}, \qquad \text{όπου} \quad f_{\mathrm{e}}(-t) = f_{\mathrm{e}}(t), \quad f_{\mathrm{o}}(-t) = -f_{\mathrm{o}}(t)$$

Να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_{\mathrm{e}}(t)|^2\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} |f_{\mathrm{o}}(t)|^2\mathrm{d}t, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(-t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{e}}^2(t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{o}}^2(t)\mathrm{d}t$$

Πρόβλημα 0.4 Να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\Pi(t) * \Pi(t) = \Lambda(t), \qquad \Pi\left(t/T\right) * \Pi\left(t/T\right) = T\Lambda\left(t/T\right)$$

Πρόβλημα 0.5 Να υπολογίσετε να ακόλουθα ολοκληρώματα

$$\int_{-3\pi/2}^{+3\pi/2} \mathrm{e}^{at}\delta(t^2-\pi^2)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sinh t\,\delta(\cos t)\,\mathrm{d}t$$

Πρόβλημα 0.6 Να αποδείξετε την ιδιότητα κλιμάκωσης της συνέλιξης

$$x\left(\frac{t}{a}\right) * y\left(\frac{t}{a}\right) = |a| z\left(\frac{t}{a}\right), \qquad \text{όπου} \quad x(t) * y(t) = z(t)$$

Πρόβλημα 0.7 Ορίζουμε τον τελεστή της μέσης τιμής, R_a, (Running Average) που δρα πάνω σ' ένα πραγματικό σήμα $x(t)$, ως ακολούθως

$$R_a[x(t)] = \frac{1}{2a}\int_{t-a}^{t+a} x(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad a > 0, \qquad -\infty < t < +\infty$$

(α) Να δείξετε ότι ο R_a είναι ένας γραμμικός και χρονικά ανεξάρτητος τελεστής.
(β) Έστω ότι $f_\omega(t) = \mathrm{e}^{j\omega t}$ για $-\infty < \omega < +\infty$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f_\omega(t)$ είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή R_a με ιδιοτιμές

$$\lambda(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{για} \quad \omega = 0, \\ \sin(\omega a)/(\omega a) = \mathrm{sinc}\,(\omega a/\pi) & \text{για} \quad \omega \neq 0 \end{cases}$$

δηλαδή να δείξετε ότι ισχύει $R_a\left[f_\omega(t)\right] = \lambda(\omega) f_\omega(t)$.
(γ) Ας υποθέσουμε ότι το σήμα $x(t)$ μπορεί να αναλυθεί ως ακολούθως

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

Να δείξετε ότι ισχύει

$$R_a\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\lambda(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$