ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

14-5-2010

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΞΑΜ. 4^{ο} και 6^{ο}

«Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις»

1. Από το βιβλίο των Boyce Diprima: Σελ. 650, ασκ. 36 και 37.

2. Για κάθε μια από τις εξισώσεις που ακολουθούν να προσδιορίσετε αν είναι γραμμική, ημιγραμμική, σχεδόν γραμμική ή μη γραμμική. Να βρεθεί ακόμα η τάξη της εξίσωσης.

   i) $u_t + uu_x = u_{xxt}$

   ii) $u_{x_1} + e^{x_2} u_{x_2} = 0$

   iii) $2u_{x_1x_1} u_{x_1x_1x_2} - (u_{x_1x_1} - u_{x_2})^2_{x_1} - 2u_{x_2} u_{x_1x_1x_2} + u_{x_1} = 0$

3. Για κάθε μια από τις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις να περιγράψετε τα υποσύνολα του R^2 στα οποία οι εξισώσεις είναι ελλειπτικού, παραβολικού ή υπερβολικού τύπου:

   i) $2u_{x_1x_1} + 4u_{x_1x_2} + 3u_{x_2x_2} - u = 0$

   ii) $u_{x_1x_1} + 2x_1 u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} + \sin(x_1x_2)u = 5$

   iii) $x_2 u_{x_1x_1} - 2u_{x_1x_2} + e^x u_{x_2x_2} + x_1^2 u_{x_1} - u = 0$

   iv) $x_2 u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + x_1^2 u_{x_2} - u = 0$

4. Να λυθούν τα ακόλουθα προβλήματα συνοριακών τιμών:

   i)

   $\Delta u(x_1, x_2) = 0 \quad , \quad (x_1, x_2) \in (0,1) \times (0,1)$

   $u(x_1, 0) = 0,\ u(x_1, 1) = x_1(x_1 - 1) \quad , \quad x_1 \in [0,1]$

   $u(0, x_2) = 0\ ,\ u(1, x_2) = 0 \quad , \quad x_2 \in [0,1]$

   ii)

$$\Delta u(\rho,\varphi)=0 \quad , \quad 1<\rho<2 \ , \ 0\le\varphi\le\pi$$
$$u(1,\varphi)=\sin\varphi \quad , \quad \varphi\in[0,\pi]$$
$$u(2,\varphi)=0 \quad , \quad \varphi\in[0,\pi]$$
$$u(\rho,0)=0 \quad , \quad 1\le\rho\le 2$$
$$u(\rho,\pi)=0 \quad , \quad 1\le\rho\le 2$$

iii)
$$\Delta u(\rho,\varphi)=0 \quad , \quad 1<\rho<2 \ , \ \varphi\in[0,2\pi)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=\sin\varphi \quad , \quad \varphi\in[0,2\pi)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=2}=0 \quad , \quad \varphi\in[0,2\pi)$$

iv)
$$\Delta u(\rho,\varphi)=0 \quad , \quad 0\le\rho<\alpha \ , \ \varphi\in[0,2\pi)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=\alpha}=f(\varphi) \quad , \quad \varphi\in[0,2\pi)$$

αν: α) $f=Ax_1$

β) $f=A(x_1^2-x_2^2)$

5. Να προσδιοριστεί το Α έτσι το ακόλουθο πρόβλημα να έχει λύση:
$$\Delta u(\rho,\varphi)=5\rho^2\sin 2\varphi \quad , \quad 1<\rho<2 \ , \ \varphi\in[0,2\pi)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=\cos 2\phi \quad , \quad \varphi\in[0,2\pi)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=2}=\mathrm{A}+5\sin\phi \quad , \quad \varphi\in[0,2\pi)$$
Στη συνέχεια να βρεθεί η λύση.

6. Να λυθεί το πρόβλημα
$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}=1,\ a^2<x_1^2+x_2^2<b^2$$
$$u=0 \ \textit{στα δύο σύνορα για} \ r=a, r=b.$$