

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (2)

6/12/2006

- 4) Η ιδιότητα να γίνεται ελάχιστη η ελεύθερη ενέργεια για ένα σύστημα που βρίσκεται σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας Όταν δύο συστήματα A και A' τεθούν σε θερμική επαφή, η ολική τους εντροπία τείνει να αυξηθεί σύμφωνα με τη σχέση $\Delta S + \Delta S' \geq 0$. Άρα, η κατάσταση ισορροπίας που επιτυγχάνεται, όταν το σύστημα A απορροφήσει ποσό θερμότητας $Q = \Delta E$, αντιστοιχεί στην κατάσταση όπου η τελική εντροπία $S + S'$ του σύνθετου απομονωμένου συστήματος γίνεται μέγιστη.

Υποθέτουμε τώρα ότι το σύστημα A είναι μικρό σε σύγκριση με το A', έτσι ώστε το A' να συμπεριφέρεται σαν μία δεξαμενή θερμότητας σε κάποια σταθερή απόλυτη θερμοκρασία T' . Η μεταβολή της εντροπίας $\Delta S'$ του A' μπορεί τότε να εκφραστεί πολύ απλά ως συνάρτηση των ΔE και T' . Να αποδειχτεί ότι η σχέση $\Delta S + \Delta S' \geq 0$, στην περίπτωση αυτή, συνεπάγεται ότι η ποσότητα $F = E - T'S$ τείνει να ελαττωθεί και γίνεται ελάχιστη στην κατάσταση ισορροπίας. (Η F είναι η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz του συστήματος A στη σταθερή θερμοκρασία T' .

- 5) Θεωρούμε έναν αριθμό συστημάτων A, B, C, D, \dots , τα οποία είναι σχεδόν ανεξάρτητα μεταξύ τους. Υποθέτουμε ότι η μεταξύ τους αλληλεπίδραση είναι τόσο ασθενής, ώστε μπορούν να θεωρηθούν ως ένα σύνθετο σύστημα $A+B+C+D+\dots$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση επιμερισμού $Z_{A+B+C+D+\dots}$ και η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz

$F_{A+B+C+D+\dots}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$Z_{A+B+C+D+\dots} = Z_A Z_B Z_C Z_D \dots, \quad F_{A+B+C+D+\dots} = F_A + F_B + F_C + F_D + \dots$$

- 6) Μέση ενέργεια συστήματος με δύο διακεκριμένες ενεργειακές στάθμες. Ανωμαλία Schottky της ειδικής θερμότητας Ένα σύστημα αποτελείται από N σωματίδια με ασθενή μεταξύ τους αλληλεπίδραση και που το καθένα μπορεί να βρίσκεται είτε στη μία είτε στην άλλη από τις δύο καταστάσεις με αντίστοιχες ενέργειες ε_1 και ε_2 , όπου $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. (a) Να βρείτε τη μέση ενέργεια $\bar{E}(T)$ και τη θερμοχωρητικότητα $C_V(T)$ του συστήματος. Να βρείτε τις οριακές τιμές της μέσης ενέργειας και της θερμοχωρητικότητας στα όρια των πολύ χαμηλών και των πολύ υψηλών θερμοκρασιών. Να δείξετε ότι η $C_V(T)$ παρουσιάζει ένα μέγιστο*, και να βρείτε την τιμή της T που αυτό παρατηρείται. Να σχεδιάστε τις $\bar{E}(T)$ και $C_V(T)$. * Η συμπεριφορά της θερμοχωρητικότητας που βρήκαμε ονομάζεται ανωμαλία Schottky.

- 7) Ελαστικές ιδιότητες του καουτσούκ Μια ταινία από καουτσούκ, που βρίσκεται σε απόλυτη θερμοκρασία T , είναι στερεωμένη στο ένα άκρο της από ένα άγκιστρο. Από το άλλο άκρο της κρεμάμε ένα βάρος W . Θεωρούμε ότι το παρακάτω αολό μικροσκοπικό μοντέλο περιγράφει την ταινία: Θεωρούμε ότι η ταινία αποτελείται από μία πολυμερή αλυσίδα με N τμήματα που συνδέονται άκρο με άκρο. Κάθε τμήμα έχει μήκος a και μπορεί να προσανατολιστεί είτε παράλληλα, είτε αντιπαράλληλα ως προς την κατακόρυφο. Να βρεθεί μία έκφραση για το τελικό μέσο μήκος L ως συνάρτηση του βάρους, W . (Αγνοούμε τις κινητικές ενέργειες και τα βάρη των ίδιων των τμημάτων, όπως και κάθε αλληλεπίδραση μεταξύ τους).

- 8) Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από N σωματίδια με ασθενή μεταξύ τους αλληλεπίδραση. Υποθέτουμε ότι το καθένα από τα σωματίδια αυτά μπορεί να βρίσκεται σε μία από τις τρεις καταστάσεις με ενέργειες $-e, 0, e$ ($e > 0$). (a) Να βρείτε την πιθανότητα να βρίσκεται ένα σωματίδιο στην κάθε μία από τις προσιτές του καταστάσεις. Ποια είναι η συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος; (b) Να βρείτε τη μέση ενέργεια του $\langle E \rangle$ του συστήματος, καθώς και τα όριά της για $T \rightarrow 0$ K και για $T \rightarrow \infty$.

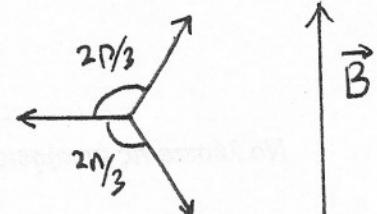
- 9) Θεωρούμε ένα παραμαγνητικό υλικό που περιέχει N άτομα με μαγνητικές ροπές μ_o . Αυτές οι μαγνητικές ροπές μπορούν να έχουν τρεις δυνατούς προσανατολισμούς, στο ίδιο επίπεδο, όπως δείχνει το σχήμα. Δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των ατόμων του υλικού αυτού.

- (a) Να υπολογίσετε την ενέργεια ενός τέτοιου ατόμου για κάθε μία από τις παραπάνω καταστάσεις, όταν το υλικό βρίσκεται σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B \hat{y}$.

Το παραμαγνητικό υλικό βρίσκεται σε ισορροπία σε θερμοκρασία T και σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B \hat{y}$. Για την περίπτωση αυτή:

(b) Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού.

(γ) Να υπολογίσετε τη μέση μαγνητισμού και τη μέση ενέργεια ανά άτομο.



10) Ένα θερμικά μονωμένο χάλκινο δοχείο με μάζα 1000 gram βρίσκεται σε θερμοκρασία 50 °C. Προσθέτουμε στο δοχείο 500 gram πάγου σε θερμοκρασία -5 °C και απομονώνουμε. (α) Θα λυώσει όλος ο πάγος; Εάν ναι, ποια θα είναι η τελική θερμοκρασία του συστήματος; Εάν όχι, πόσος πάγος θα λυώσει; (β) Να υπολογίσετε την ολική μεταβολή στην εντροπία που θα επέλθει στο σύστημα. Η ειδική θερμότητα του χαλκού είναι 0,418 Joules/(gram K), η ειδική θερμότητα του νερού είναι 4,18 Joules/(gram K) και η ειδική θερμότητα του πάγου είναι 2,13 Joules/(gram K). Για να λυώσει ένα γραμμάριο πάγου απαιτούνται 333 Joules.

11) Σε ένα πολύ μεγάλο κομμάτι πάγου με θερμοκρασία 0°C ανοίγεται μία τρύπα και μέσα σε αυτήν βάζουμε 300 gram ρινισμάτων μολύβδου (Pb) σε θερμοκρασία 200 °C. (α) Πόσος πάγος θα λυώσει; (β) Να υπολογίσετε τη μεταβολή που θα επέλθει στην εντροπία του συστήματος κατά τη διαδικασία (α). Ειδική θερμότητα του Pb = 0,126 joule/(gram °C). Για να λυώσει ένα γραμμάριο πάγου απαιτούνται 333 joules.

12) Μεταβολές της εντροπίας κατά τις ανταλλαγές θερμότητας (α) Ένα χλιόγραμμο νερού σε θερμοκρασία 0 °C έρχεται σε επαφή με μία μεγάλη δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία 100 °C. Όταν το νερό φτάσει τη θερμοκρασία των 100 °C, ποια θα είναι η μεταβολή στην εντροπία του νερού και η μεταβολή στην εντροπία της δεξαμενής θερμότητας; Ποια θα είναι η μεταβολή στην εντροπία του ολικού συστήματος (δεξαμενή θερμότητας και νερό); (β) Εάν το νερό θερμαίνοταν από τους 0 °C στους 100 °C φέρνοντάς το πρώτα σε επαφή με μία δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία 50 °C και ύστερα με μία δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία 100 °C, ποια θα ήταν η μεταβολή της εντροπίας του ολικού συστήματος; (γ) Να δείξετε με ποιον τρόπο θα έπρεπε να θερμανθεί το νερό από τους 0 °C στους 100 °C, χωρίς να μεταβληθεί η εντροπία του ολικού συστήματος.

13) Η εντροπία κατά την τήξη Πάγος και νερό συνυπάρχουν σε ισοποπία στη θερμοκρασία 0 °C. Για να λυώσει ένα γραμμομόριο (mol) πάγου απαιτείται ποσό θερμότητας 6000 joules. (α) Να υπολογίσετε τη διαφορά εντροπίας μεταξύ ενός γραμμομορίου νερού και ενός γραμμομορίου πάγου σε θερμοκρασία 0 °C. (β) Να βρείτε το λόγο του αριθμού των προσιτών καταστάσεων του νερού προς τον αριθμό των προσιτών καταστάσεων του πάγου στην ίδια θερμοκρασία.

14) Το τριπλό σημείο της αμμωνίας Η πίεση ατμών p_1 (σε χιλιοστά υδραργύρου) της στρεάς αμμωνίας δίνεται από τη σχέση $\ln p_1 = 23,03 - 3474/T$, ενώ η πίεση ατμών της υγρής αμμωνίας δίνεται από τη σχέση $\ln p_2 = 19,49 - 3063/T$. Με βάση τα παραπάνω: α) Ποια είναι η θερμοκρασία του τριπλού σημείου της αμμωνίας; β) Να βρείτε τις λανθάνουσες θερμότητες εξάχνωσης και εξάτμισης της αμμωνίας στο τριπλό σημείο. γ) Να βρείτε τη λανθάνουσα θερμότητα τήξης της αμμωνίας στο τριπλό σημείο.

15) Συνθήκη χημικής ισορροπίας Θεωρούμε τη χημική αντίδραση $2 \text{CO}_2 \leftrightarrow 2 \text{CO} + \text{O}_2$. Υποθέτουμε ότι το σύστημα που αποτελείται από τα μόρια CO_2 , CO και O_2 διατηρείται σε σταθερή θερμοκρασία και πίεση. Αν συμβολίσουμε με N_1 τον αριθμό των μορίων του CO_2 , με N_2 τον αριθμό των μορίων του CO και με N_3 τον αριθμό των μορίων του O_2 , τότε η ελεύθερη ενέργεια Gibbs του συστήματος είναι συνάρτηση αυτών των αριθμών, δηλαδή $G = G(N_1, N_2, N_3)$. Αφού στην κατάσταση ισορροπίας η ελεύθερη ενέργεια Gibbs πρέπει να είναι ελάχιστη, η μεταβολή της ΔG πρέπει να μηδενίζεται, ίταν σύμφωνα με τη χημική αντίδραση που μας αφορά, δύο μόρια CO_2 μετασχηματίζονται σε δύο μόρια CO και ένα μόριο O_2 . Να δείξετε ότι αυτή η συνθήκη ισορροπίας μπορεί να γραφεί με τη μορφή $2 \mu_1 = 2\mu_2 + \mu_3$, όπου $\mu_i \equiv \partial G / \partial N_i$ είναι το χημικό δυναμικό ανά μόριο του είδους i.