Εξέταση Πραγματικής Ανάλυσης, 22/06/2017

Θέμα 1.

(α) (i) Διατυπώστε τα αξιώματα Peano για τους φυσικούς αριθμούς.

(ii) Διατυπώστε τον ορισμό της καλής διάταξης και αποδείξτε ότι η διάταξη του $\mathbb{N}$ είναι καλή.

(iii) Έστω M ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει μια απεικόνιση $\phi : \mathbb{N} \to M$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και επί.

(β) (i) Δώστε τον ορισμό του άνω φράγματος και του supremum ενός μη κενού υποσυνόλου του $\mathbb{R}$. Διατυπώστε την ιδιότητα της πληρότητας του $\mathbb{R}$.

(ii) Δείξτε ότι το $\mathbb{N}$ ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

(iii) Δείξτε ότι κάθε ακολουθία στο $\mathbb{R}$ έχει μονότονη υπακολουθία.

Θέμα 2 (α) (i) Δώστε τον ορισμό του συμπαγούς υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου.

(ii) Δείξτε ότι αν ο (X, ρ) είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $A \subset X$ άπειρο, τότε υπάρχει σημείο συσσώρευσης του A.

(iii) Δείξτε ότι αν $K \subset X$ συμπαγές, τότε υπάρχουν $x_0, y_0 \in K$ ώστε $\rho(x_0, y_0) = \operatorname{diam}(K)$.

(β). Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ συστολή (δηλ. υπάρχει $C < 1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \leq C\rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.) Δείξτε ότι:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{diam} f^n[X] \leq C^n \cdot \operatorname{diam} X$. και ότι $f^{n+1}[X] \subset f^n[X]$. =

(ii) Υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $\cap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = \{x_0\}$ και ότι $f(x_0) = x_0$. (Υπόδειξη: Αφού (X, ρ) συμπαγής, τότε $\operatorname{diam} X < \infty$.)

(iii) Δείξτε ότι το x_0 είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της f.

Θέμα 3 (α) Αν (X, ρ) μετρικός χώρος και $V_1, \ldots, V_n$ ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X, δείξτε $\cap_{i=1}^{n} V_n$ είναι ανοικτό και πυκνό.

(β) Έστω $(D_n)_n$ ακολουθία από ανοικτά και πυνκά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και I το σύνολο των αρρήτων. Δείξτε ότι $\cap_n D_n \cap I$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

(γ) Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $(f_n)_n$ ακολουθία συναρτήσεων με $f_n : X \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε για κάθε $x \in X$ το $(f_n(x))_n$ να είναι φραγμένο. Δείξτε ότι υπάρχει $V \subset X$ ανοικτό μη κενό και $C > 0$ ώστε για κάθε $x \in V$ να ισχύει ότι $\sup\{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} \leq C$.

Θέμα 4 Έστω X ένα μη κενό σύνολο.

(i) Αν $(f_n)_n$, $f : X \to \mathbb{R}$, δώστε τον ορισμό της κατά σημείο και της ομοιόμορφης σύγκλισης της $(f_n)_n$ στην f.

(ii) Δώστε παράδειγμα μιας ακολουθίας συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο και δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

(iii) Έστω X άπειρο αριθμήσιμο σύνολο και $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, κατά σημείο φραγμένες. Δείξτε ότι υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ και υπακολουθία $(f_{n_k})_k$ ώστε να συγκλίνει κατά σημείο στην f.

(iv) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς και $D \subseteq X$ πυκνό ώστε $(f_n|_D)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f|_D$. Δείξτε ότι η $(f_n)_n$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε όλο τον X.