Διαφορική Γεωμετρία καμπυλών και επιφανειών
Επαναληπτική εξέταση Οκτώβριος 2014

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ 1: Για μια φυσική παραμετρική καμπύλη του επιπέδου: $\boldsymbol{a}(s),\ s\in[-1,\ 1]$ με μη σταθερή καμπυλότητα $k(s)$ κατασκευάζουμε την παράλληλη σε σταθερή απόσταση $\varepsilon>0$ καμπύλη β με: $\beta(s)=\boldsymbol{a}(s)+\varepsilon N(s)$.

Α. Να γίνει ένα σχήμα που να εμφανίζονται τα $\boldsymbol{a}(s),\ T(s),\ N(s),\ \beta(s)$. (Μονάδες 0.3)

Β. Να δειχθεί ότι η $\beta(s)$ δεν είναι εν γένει φυσική παραμετρική καμπύλη. (Μονάδες 0.3)

Γ. Να εξετασθεί για ποιά απόσταση ε η καμπύλη β είναι μη ομαλή στο σημείο $\beta(s)$. (Μονάδες 0.4)

Δ. Να υπολογισθεί η καμπυλότητα $k_\beta(s)$ της $\beta(s)$ συναρτήσει της καμπυλότητας $k(s)$ της $\boldsymbol{a}(s)$. (Μονάδες 1,5)

ΘΕΜΑ 2. Δίνεται η ομαλή φυσική παραμετρική καμπύλη του χώρου $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),\ s\in I$ η οποία βρίσκεται σε μια σφαίρα με κέντρο την αρχή και ακτίνας a.

Α. Χωρίς πράξεις αλλά διατυπώνοντας πλήρως ένα συλλογισμό να αποδείξετε ότι αν η καμπύλη έχει στρέψη μηδέν, τότε είναι ένας κύκλος. (Μονάδες 0.5)

Β. Να δείξετε ότι η καμπυλότητά της $k(s)$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από $1/a$. (Μονάδες 0.5)

Γ. Αν $\boldsymbol{N},\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}$ είναι τα διανύσματα του τριέδρου Frenet και $k(s),\ \tau(s)$ η καμπυλότητα και η στρέψη της καμπύλης, να δείξετε ότι $\boldsymbol{r}(s)=-\dfrac{1}{k(s)}\boldsymbol{N}+\dfrac{k'(s)}{k^2(s)\tau(s)}\boldsymbol{B}$. (Μονάδες 1)

Δ. Να δείξετε ότι αν η καμπυλότητα και η στρέψη ικανοποιούν την σχέση: $\left(\dfrac{1}{k(s)}\right)^2+\left(\dfrac{k'(s)}{k^2(s)\tau(s)}\right)^2=\alpha^2$ (Μονάδες 0.5)

ΘΕΜΑ 3. **Α)** Έστω η στοιχειώδης επιφάνεια $S:\mathbf{r}(u,v),\ (u,v)\in\Omega$, κλάσης 2. Αποδείξτε τους τύπους: $L=-\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{N}_1,\quad \kappa\alpha\iota\ [\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_{11},\boldsymbol{N}]=\Gamma^2{}_{11}H$. (Μονάδες 1.3)

Β) Προσδιορίστε την f ώστε κάθε σημείο της επιφάνειας $S:\mathbf{r}(x,\theta)=(x\cos\theta,\ x\sin\theta,\ f(x)),x\in(2,4),\ \theta\in\mathbb{R}$, να είναι παραβολικό. Να σχεδιαστεί η f και η επιφάνεια στη περίπτωση αυτή. (Μονάδες 1.2)

ΘΕΜΑ 4. Έστω η στοιχειώδης επιφάνεια $S:\mathbf{r}(u,v),\ (u,v)\in\Omega$ κλάσης 2 και η καμπύλη της επιφάνειας $C:\varphi(s)=\mathbf{r}(u(s),v(s)),\ s\in I$, όπου s είναι φυσική παράμετρος. (Μονάδες 1,5)

Α) Δώστε τον ορισμό του διανύσματος της γεωδαισιακής καμπυλότητας $\boldsymbol{k}_g(s)$ της C στο σημείο $\varphi(s)$ και αποδείξτε την ισοδυναμία $\boldsymbol{k}_g(s)=0\Leftrightarrow U(s)=V(s)=0$, όπου $U(s)=\varphi''(s)\cdot\boldsymbol{r}_1(u(s),v(s)),\ V(s)=\varphi''(s)\cdot\boldsymbol{r}_2(u(s),v(s))$.

Β) Αν $\mathbf{r}(u,v)=(u,\ v,\ u^2+v^2),u,v\in\mathbb{R}$, εξετάστε αν η καμπύλη $u=\cos\theta,\ v=\sin\theta$ της επιφάνειας είναι γεωδαισιακή. Να σχεδιαστούν η επιφάνεια και η καμπύλη. (Μονάδες 1)

Καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ **Εφαπτόμενο και κάθετο μοναδ/ο διάνυσμα:** $\upsilon(t)=\|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|$, $\boldsymbol{T}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(t)/\upsilon(t)$, $\boldsymbol{N}(t)=J\boldsymbol{T}(t)$, όπου $J(x_1,x_2)=(-x_2,x_1)$. **Εφαπτόμενη ευθεία:** $\boldsymbol{R}(\lambda)=\boldsymbol{r}(t_0)+\lambda\dot{\boldsymbol{r}}(t_0),\ \lambda\in\mathbb{R}$. **Φυσική παράμετρος :** Καμπυλότητα: $\kappa(s)=\boldsymbol{r}''(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)=\boldsymbol{T}'(s)\cdot J\boldsymbol{T}(s)$, **Τύποι Frenet:** $\boldsymbol{T}'(s)=\kappa(s)\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{N}'(s)=-\kappa(s)\boldsymbol{T}$ **Τυχαία παράμετρος:** $\upsilon(t)=\|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|=\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)\right)^{1/2},\ \kappa(t)=\ddot{\boldsymbol{r}}(t)\cdot J\dot{\boldsymbol{r}}(t)/\upsilon^3(t),\ \kappa(t)=\left(\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\ddot{x}(t)\dot{y}(t)\right)/\upsilon^3(t)$ **Τύποι Frenet:** $\dot{\boldsymbol{T}}=\kappa\upsilon\boldsymbol{N},\quad \dot{\boldsymbol{N}}=-\kappa\upsilon\boldsymbol{T}$. **Καμπύλες του** $\mathbb{R}^3$ ***Για φυσική παράμετρο:*** **Βασικά μοναδιαία διανύσματα:** $\boldsymbol{T}(s)=\boldsymbol{r}'(s)$, $\boldsymbol{N}(s)=\dfrac{\boldsymbol{r}''(s)}{\|\boldsymbol{r}''(s)\|}$, $\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)$, **Τύποι Frenet :** $\boldsymbol{T}'=\kappa\boldsymbol{N},\quad \boldsymbol{N}'=-\kappa\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{B}'=-\tau\boldsymbol{N},\quad \kappa(s)=\|\boldsymbol{T}'(s)\|=\|\boldsymbol{r}''(s)\|$ η καμπυλότητα, $\tau(s)=-\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{B}'$ η στρέψη. ***Για τυχαία παράμετρο:*** $\upsilon(t)=\|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|,\ \boldsymbol{T}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|},\ \boldsymbol{B}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|},\ \boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}$

$\kappa=\dfrac{\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\|^3},\quad \tau=\dfrac{(\dot{\boldsymbol{r}}\ \ddot{\boldsymbol{r}}\ \dddot{\boldsymbol{r}})}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\|^2}$ **Τύποι Frenet :** $\dot{\boldsymbol{T}}=\kappa\upsilon\boldsymbol{N},\ \dot{\boldsymbol{N}}=-\kappa\upsilon\boldsymbol{T}+\tau\upsilon\boldsymbol{B},\ \dot{\boldsymbol{B}}=-\tau\upsilon\boldsymbol{N}$.

Διάρκεια Εξέτασης 2,5 ώρες

$\|r(s)\|=a$

$r(s)\cdot r(s)=a^2$