ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΟΜΑΔΑ ΤΟΥ $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Μία απεικόνιση $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$d(f(x),f(y))=d(x,y),\ \forall x,y \in \mathbb{R}^n,$$

λέγεται **ισομετρία** του $\mathbb{R}^n$.

Στερεά κίνηση του $\mathbb{R}^n$ είναι μία ισομετρία **επί** του $\mathbb{R}^n$.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι :

1. Μία ισομετρία f του $\mathbb{R}^n$ είναι απεικόνιση 1-1.

2. Η απεικόνιση **μεταφορά** $\tau_a:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; x \to \tau_a(x)=x+a$, είναι ισομετρία.

3. Η σύνθεση δύο ισομετριών του $\mathbb{R}^n$ είναι ισομετρία του $\mathbb{R}^n$.

4. Αν η απεικόνιση f είναι ισομετρία **επί** του $\mathbb{R}^n$, τότε ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} και είναι επίσης ισομετρία επί του $\mathbb{R}^n$.

5. Το σύνολο E(n) των ισομετριών επί του $\mathbb{R}^n$ αποτελεί **ομάδα** ως προς τη σύνθεση απεικονίσεων (**Ευκλείδεια ομάδα** του $\mathbb{R}^n$).

6. Κάθε ισομετρία $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $f(0)=0$, είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.

7. Αν $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομετρία του $\mathbb{R}^n$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικές απεικονίσεις

$$\tau:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ (μεταφορά)}$$

$$\sigma:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ (ορθογώνιος μετασχηματισμός)}$$

έτσι ώστε να ισχύει : $f=\tau\circ\sigma$.

Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΟΝΑΔΑ ΤΟΥ $\mathbb{R}^n$ (Απαντήσεις Ψυχαρίου 4)

1. Έστω $f(x)=f(y)$. Τότε $d(f(x),f(y))=0 \Rightarrow d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$.

2. $d(\tau_a(x),\tau_a(y)) = d(x+a,y+a) = \|x+a-y-a\| = \|x-y\| = d(x,y)$.

3. Αν f, g είναι ισομετρίες του $\mathbb{R}^n$, τότε ορίζεται η σύνθεση τους $f\circ g:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ και ισχύει για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$, ότι:

$$d((f\circ g)(x),(f\circ g)(y)) = d(f(g(x)),f(g(y))) = d(g(x),g(y)) \quad [\text{αφού } f \text{ ισομετρία}]$$
$$= d(x,y) \quad [\text{αφού } g \text{ ισομετρία}]$$

Άρα η $f\circ g$ είναι ισομετρία.

4. Η f είναι 1-1 και επί, οπότε ορίζεται η $f^{-1}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ και ισχύει ότι $f^{-1}\circ f = id_{\mathbb{R}^n}$. Επιπλέον ισχύει:

$$d(f^{-1}(f(x)),f^{-1}(f(y))) = d(f^{-1}\circ f(x), f^{-1}\circ f(y))$$
$$= d(x,y) \quad [\text{αφού } f^{-1}\circ f = id_{\mathbb{R}^n}]$$
$$= d(f(x),f(y)) \quad [\text{αφού } f \text{ ισομετρία}].$$

Η f^{-1} είναι επί, αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ ισχύει: $f^{-1}(f(x))=x$.

5. Σύμφωνα με το (3) η σύνθεση απεικονίσεων είναι εσωτερική πράξη επί του $E(n)$, που ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα.
Το ουδέτερο στοιχείο της πράξης αυτής είναι η ταυτοτική απεικόνιση $id_{\mathbb{R}^n}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n : x \longrightarrow id_{\mathbb{R}^n}(x)=x$, η οποία ανήκει στο σύνολο $E(n)$, αφού
$d(id_{\mathbb{R}^n}(x), id_{\mathbb{R}^n}(y)) = d(x,y)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$.
Λόγω της (4) για κάθε $f\in E(n)$, ισχύει ότι $f^{-1}\in E(n)$.

6. Κατ' αρχήν ισχύει ότι: $\|f(x)\|=\|x\|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. (1).
Πράγματι, $\|f(x)\| = d(f(x),0) = d(f(x),f(0)) = d(x,0) = \|x\|$.
Επιπλέον έχουμε, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$:

$$d(f(x),f(y)) = d(x,y) \Leftrightarrow \|f(x)-f(y)\| = \|x-y\| \Leftrightarrow \|f(x)-f(y)\|^2 = \|x-y\|^2$$
$$\Leftrightarrow \langle f(x)-f(y), f(x)-f(y)\rangle = \langle x-y, x-y\rangle$$
$$\Leftrightarrow \langle f(x),f(x)\rangle - 2\langle f(x),f(y)\rangle + \langle f(y),f(y)\rangle = \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$\Leftrightarrow \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x),f(y)\rangle + \|f(y)\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$
$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \langle f(x),f(y)\rangle = \langle x,y\rangle. \quad (2)$$

Απομένει να αποδείξουμε ότι η f είναι γραμμική απεικόνιση.
Θεωρούμε μία ορθοκανονική βάση $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή $\langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij}$, $i,j=1,\dots,n$.

Τότε και το σύνολο $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, αφού $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle \overset{(2)}{=} \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$.

Αν $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n$, τότε $x_i = \langle x, e_i\rangle$, $i=1,2,\dots,n$

Υποθέτουμε ότι $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$, ως προς τη βάση $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$.

Τότε $\lambda_i = \langle f(x), f(e_i)\rangle = \langle x, e_i\rangle = x_i$, οπότε θα είναι:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i). \qquad (3)$$

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in \mathbb{R}^n$, τότε

$\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) e_i$, οπότε θα έχουμε, λόγω (3),

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) f(e_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i f(e_i) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γραμμική, οπότε λόγω και του (2) είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός.

7. Θεωρούμε τη μετάφορά $\tau: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \to \tau(x) := f(0) + x$, που είναι ισομετρία επί του $\mathbb{R}^n$, οπότε η αντίστροφη $\tau^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \to \tau^{-1}(x) = -f(0) + x$ είναι ισομετρία. Επομένως και η σύνθεση $\tau^{-1} \circ f$ είναι ισομετρία επί του $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον ισχύει: $(\tau^{-1} \circ f)(0) = \tau^{-1}(f(0)) = -f(0) + f(0) = 0$, οπότε από το (6) η $\tau^{-1} \circ f$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, έστω $\sigma = \tau^{-1} \circ f$, οπότε θα είναι $f = \tau \circ \sigma$.

<u>Μοναδικότητα των τ, σ</u>

Έστω ότι $f = \tau \circ \sigma = \tau' \circ \sigma'$

Τότε $\tau^{-1} \circ \tau' \circ \sigma' = \sigma$ και $(\tau^{-1} \circ \tau' \circ \sigma')(0) = \sigma(0) \Rightarrow (\tau^{-1} \circ \tau')(\sigma'(0)) = \sigma(0)$

$\Rightarrow (\tau^{-1} \circ \tau')(0) = 0$

$\Rightarrow \tau^{-1} \circ \tau' = id_{\mathbb{R}^n}$ [γιατί $\tau^{-1} \circ \tau'$ είναι μετάφορά με $\tau^{-1} \circ \tau'(0) = 0$]

$\Rightarrow \tau = \tau'$.

Από $\tau \circ \sigma = \tau' \circ \sigma'$ και $\tau = \tau' \Rightarrow \tau \circ \sigma = \tau \circ \sigma'$

$\Rightarrow \tau^{-1} \circ (\tau \circ \sigma) = \tau^{-1} \circ (\tau \circ \sigma') \Rightarrow (\tau^{-1} \circ \tau) \circ \sigma = (\tau^{-1} \circ \tau) \circ \sigma'$

$\Rightarrow \sigma = \sigma'$.