Πυκνά σύνολα και διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι

Λάθη και σωστές λύσεις, αναφέρετέ τις στο topic του μαθήματος

1.

Αφού το D είναι πυκνό, $\forall x\in X, \exists (x_n)_{n\in N}\subset D: x_n\to x$. Επειδή οι f και g είναι συνεχείς, ισχύει η αρχή μεταφοράς, δηλαδή $f(x_n)\to f(x)$ και $g(x_n)\to g(x)$.
Όμως, $\forall x\in D, f(x)=g(x)\Rightarrow f(x_n)=g(x_n)$. Δηλαδή, οι δύο αυτές ακολουθίες ταυτίζονται και θα συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Επομένως, $f(x)=g(x), \forall x\in X$.

2.

Αποσαφηνίζουμε καταρχήν, ότι $f(D)=\{f(x): x\in D\}$ και $f(X)=\{f(x): x\in X\}$.
Αφού το D είναι πυκνό, $\forall x\in X, \exists (x_n)_{n\in N}\subset D: x_n\to x$. Επειδή η f είναι συνεχής, ισχύει η αρχή της μεταφοράς, δηλαδή $f(x_n)\to f(x)$. Όμως, $f(x_n)\in f(D), \forall n\in \mathbb{N}$ και $f(x)\in f(X)$. Έτσι, για κάθε $y=f(x)\in f(X), \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}=(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\subset f(X): y_n\to y$. Δηλαδή το $f(D)$ είναι πυκνό υποσύνολο στον $(f(X), d)$.
Αν η f είναι *επί*, τότε $f(X)=Y$, και αν ο X είναι διαχωρίσιμος τότε το D είναι αριθμήσιμο, δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $h:\mathbb{N}\to D$ *επί*. Έτσι, η σύνθεση $h\circ f_{|D}:\mathbb{N}\to f(D)$ είναι κι αυτή επί και επομένως το $f(D)$ (εκτός από πυκνό) είναι και αριθμήσιμο. Άρα, ο (Y, d) είναι διαχωρίσιμος.

3.

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε πυκνό $D\subset X$, για κάθε $y\in X$ υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset D\setminus\{x\}$ τέτοια, ώστε $y_n\to y$, για κάθε $x\in D$.
Αν $y\neq x$, τότε θέτουμε $r=\frac{\rho(x,y)}{2}$. Λόγω πυκνότητας του D έχουμε ότι για κάθε $y\in X$ υπάρχει ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset D$ τέτοια, ώστε $z_n\to y$. Τα $S(x,r)$ και $S(y,r)$ είναι ανοιχτά και ξένα σύνολα. Μάλιστα, λόγω της σύγκλισης της $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, έχουμε ότι $\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0, z_n\in S(y,r)$. Θεωρώντας την ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι, ώστε $y_n=z_{n_0+n}$ έχουμε ότι $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset D\setminus\{x\}$ και ως υπακολουθία της $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κι αυτή στο y.
Αν $y=x$, τότε χωρίζουμε σε περιπτώσεις:
Αν $\rho(x, D\setminus\{x\})=0$, τότε $x\in\overline{D\setminus\{x\}}$. Όμως, προφανώς $x\notin D\setminus\{x\}$, άρα $x\in(\overline{D\setminus\{x\}})\setminus(D\setminus\{x\})$ και επομένως το x είναι σημείο συσσώρευσης του $D\setminus\{x\}$. Επομένως, υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset D\setminus\{x\}$ τέτοια, ώστε $y_n\to x=y$.
Αν $\rho(x, D\setminus\{x\})=M>0$ τότε, $S\left(x, \frac{M}{3}\right)\cap(D\setminus\{x\})=\emptyset$. Όμως, $\operatorname{int}\{x\}=\emptyset\Rightarrow S(x,\varepsilon)\setminus\{x\}\neq\emptyset$.
Δηλαδή, το x είναι σημείο συσσώρευσης του X, επομένως υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$, ώστε $x_n\to x=y$ και θέτω $a_n=\frac{\rho(x,x_n)}{3}$. Προφανώς, $\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0, x_n\in S\left(x, \frac{M}{8}\right)$. Τώρα, αφού το D είναι πυκνό, $\forall k\in\mathbb{N}, \exists (z_m^k)_{m\in\mathbb{N}}\subset D: z_m^k\to x_k$. Για κάθε $k\in\mathbb{N}$, επιλέγω $m_0(k)\in\mathbb{N}: z_{m_0}^k\in S\left(x_k, \frac{M}{8}\right)\cap S(x_k, a_k)$ και θέτω $z_k=z_{m_0}^k$. Κατασκευάστηκε έτσι μια ακολουθία $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset D\setminus\{x\}$.
Όμως, $\rho(x,z_k)\leq\rho(x,x_k)+\rho(x_k,z_k)<\frac{M}{8}+\frac{M}{8}=\frac{M}{4}<\frac{M}{3}$, επομένως, $S\left(x, \frac{M}{3}\right)\cap(D\setminus\{x\})\neq\emptyset$.
Άτοπο, δηλαδή δεν μπορεί να συμβαίνει $\rho(x, D\setminus\{x\})=M>0$.

4.

Έστω ότι το $\{x_0\}$ δεν είναι ανοιχτό, άρα $\forall \varepsilon > 0, S(x_0, \varepsilon) \cap (X \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \Rightarrow S(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.
Δηλαδή το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του X. Έστω ότι
$\operatorname{int}\{x_0\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : S(x_0, \varepsilon) \subset \{x_0\} \neq \emptyset \Rightarrow S(x_0, \varepsilon) \cap (X \setminus \{x_0\}) = \emptyset \Rightarrow S(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\} = \emptyset$. Άτοπο. Άρα.
$\operatorname{int}\{x_0\} = \emptyset \Rightarrow S(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ Τότε, το $X \setminus \{x_0\}$ είναι πυκνό, γιατί αν όχι, τότε
$\exists x \in X, \exists \varepsilon > 0 : S(x, \varepsilon) \cap (X \setminus \{x_0\}) = \emptyset \Rightarrow S(x, \varepsilon) \setminus \{x_0\} = \emptyset$, άτοπο. Όμως, $x_0 \notin X \setminus \{x_0\}$. Πάλι άτοπο.
Άρα, το $\{x_0\}$ είναι ανοιχτό.