Πλήρεις μετρικοί χώροι

Αν βρεις λάθη, ανάφερέ τα στο topic του μαθήματος.
Αν έχεις και τη σωστή λύση, γραφ'τη.

1.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ βασική ακολουθία. Από τον ορισμό έχουμε,
$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n,m\geq n_0, d(x_n,x_m)<\varepsilon\Rightarrow d(x_n,x_m)=0\Rightarrow x_n=x_m$
Δηλαδή, κάθε βασική ακολουθία στον (X,d) είναι τελικά σταθερή και άρα συγκλίνει. Επομένως, ο (X,d) είναι πλήρης.

2.

Το $\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ δεν είναι κλειστό, άρα το $X\setminus\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ δεν είναι ανοιχτό. Άρα,
$\exists x\notin\{x_n:n\in\mathbb{N}\}:\ \forall\frac{\varepsilon}{2}>0,\ S(x,\varepsilon)\cap\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\neq\emptyset\Rightarrow\forall\frac{\varepsilon}{2}>0,\ \exists I\subset\mathbb{N}:\ \forall n\in I,\ \rho(x,x_n)<\frac{\varepsilon}{2}$.

Επιπλέον, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy, δηλαδή $\forall\frac{\varepsilon}{2}>0,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n,m\geq n_0,\rho(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$. Για κάθε $\varepsilon>0$, θέτω $M=I\cap\{n:n\geq n_0\}$ (το οποίο εξαρτάται από το ε).
Έτσι, $\forall n,m\in M,\rho(x_m,x)\leq\rho(x_m,x_n)+\rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.
Αυτό σημαίνει ότι η υπακολουθία $(x_n)_{n\in M}\subset(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x, όπου $x\neq x_n,\forall n\in\mathbb{N}$. Αφού η βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία $(x_n)_{n\in M}$ που συγκλίνει στο x, έπεται ότι ολόκληρη η ακολουθία συγκλίνει στο ίδιο x.

3.

Έστω $F_n=[n,\infty)$. Το F_n είναι κλειστό για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι όντως φθίνουσα ακολουθία. Έστω $\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n\neq\emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει
$y\in\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n\Rightarrow y\in[n,\infty),\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow y\geq n,\forall n\in\mathbb{N}$
Άτοπο. Άρα, $\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n=\emptyset$.

4.

Για κάθε $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$ θεωρώ την ανοιχτή σφαίρα $S(\sqrt{2},\varepsilon_n)$ στο $\mathbb{R}$. Λόγω της πυκνότητας των ρητών στους πραγματικούς, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θα υπάρχει ένα $p_n\in(\sqrt{2}-\varepsilon_n,\sqrt{2}-\varepsilon_{n+1})$ και ένα $q_n\in(\sqrt{2}+\varepsilon_{n+1},\sqrt{2}+\varepsilon_n)$. Το $F_n=[p_n,q_n]\cap\mathbb{Q}$ είναι κλειστό σύνολο για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι $p_n<p_{n+1}$ και $q_n>q_{n+1}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα $F_{n+1}\subset F_n,\forall n\in\mathbb{N}$. Επίσης,
$p_n<\sqrt{2}-\frac{1}{n+1}\to\sqrt{2}\Rightarrow p_n\to\sqrt{2}$ και $q_n<\sqrt{2}+\frac{1}{n}\to\sqrt{2}\Rightarrow q_n\to\sqrt{2}$. Άρα $diam\,F_n=|p_n-q_n|\to 0$.
Παρατηρούμε, τώρα, ότι $\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n\subset\cap_{n\in\mathbb{N}}\left[\sqrt{2}-\frac{1}{n},\sqrt{2}+\frac{1}{n}\right]=\{\sqrt{2}\}\notin\mathbb{Q}\Rightarrow\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n=\emptyset$.

5.

i)

Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, επομένως μπορεί να γραφτεί $\mathbb{Q}=\cup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}$. Επίσης, $\operatorname{int}\{q_n\}=\emptyset,\forall n\in\mathbb{N}$, γιατί αν όχι, τότε $\exists m\in\mathbb{N},\exists x\in R,\exists\varepsilon>0:(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset\{q_m\}$, που είναι άτοπο. Άρα
$\operatorname{int}\{q_n\}=\emptyset\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},\forall\varepsilon>0,(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap(\mathbb{R}\setminus\{q_n\})\neq\emptyset\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R},\forall\varepsilon>0,(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\setminus\{q_n\}\neq\emptyset$
$\Rightarrow\forall\varepsilon>0,(q_n-\varepsilon,q_n+\varepsilon)\setminus\{q_n\}\neq\emptyset$

Δηλαδή, το q_n είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{R}$. Επομένως, το $\mathbb{R}\setminus\{q_n\}$ είναι πυκνό, γιατί αν όχι, τότε, $\exists x\in\mathbb{R}, \exists\varepsilon>0, (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\cap(\mathbb{R}\setminus\{q_n\})\neq\emptyset$, άτοπο. Επιπλέον, το $\mathbb{R}\setminus\{q_n\}$ είναι ανοιχτό.
Έτσι, $I=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\mathbb{R}\setminus\left(\cup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}\right)=\cap_{n\in\mathbb{N}}\left(\mathbb{R}\setminus\{q_n\}\right)$

ii)

$\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}V_n\right)\cap I=\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}V_n\right)\cap\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}\left(\mathbb{R}\setminus\{q_n\}\right)\right)$

Έστω $\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}V_n\right)\cap I=\emptyset$, τότε

$\mathbb{R}=\mathbb{R}\setminus\emptyset=\mathbb{R}\setminus\left(\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}V_n\right)\cap I\right)=\left(\mathbb{R}\setminus\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}V_n\right)\right)\cup\left(\mathbb{R}\setminus I\right)=\left(\cup_{n\in\mathbb{N}}\left(\mathbb{R}\setminus V_n\right)\right)\cup\mathbb{Q}$

$=\left(\cup_{n\in\mathbb{N}}\left(\mathbb{R}\setminus V_n\right)\right)\cup\left(\cup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}\right)$

Έτσι, έχουμε περιγράψει έναν πλήρη μετρικό χώρο ως ένωση άπειρων κλειστών υποσυνόλων. Τότε, από το θεώρημα Baire έχουμε ότι $\exists n_0\in\mathbb{N}: \operatorname{int}\left(\mathbb{R}\setminus V_n\right)\neq\emptyset$ ή $\operatorname{int}\left(\{q_n\}\right)\neq\emptyset$. Το δεύτερο δεν συμβαίνει, όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Άρα $\operatorname{int}\left(\mathbb{R}\setminus V_n\right)\neq\emptyset$ για κάποιο $n_0\in\mathbb{N}$. Επειδή, όμως, τα V_n είναι πυκνά, έχουμε ότι $\operatorname{int}\left(\mathbb{R}\setminus V_n\right)=\emptyset$. Άτοπο. Άρα $\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}V_n\right)\cap I\neq\emptyset$.