Μοντέλα Υπολογισμού
Προκαταρκτικά
Στάθης Ζάχος

1. Απόδειξη με αρχή μαθ. επαγωγής: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. Απόδειξη με αρχή μαθ. επαγωγής: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2$

3. Έστω a, b φυσικοί αριθμοί και έστω $\max(a,b)$ ο μέγιστος εξ αυτών.

   Ισχυρισμός: $[P(n):] \quad n = \max(a,b) \implies (a = n \wedge b = n)$

   Απόδειξη με επαγωγή

   - $P(0): \quad 0 = \max(a,b) \implies a = 0 \wedge b = 0$, προφανώς
   - $P(n) \implies P(n+1)$

     Η υπόθεση είναι $n = \max(a,b)$. Ορίζουμε $a' = a - 1$, $b' = b - 1$.
     Προφανώς, $\max(a',b') = n - 1$.
     Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση: $a' = n - 1 \wedge b' = n - 1$.
     Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των a', b' προκύπτει $a = n \wedge b = n$, ο.ε.δ.

   Πού είναι το λάθος στην παραπάνω απόδειξη;

4. Οι συμβολοακολουθίες με ισορροπημένες παρενθέσεις μπορούν να οριστούν με δύο τρόπους:

   Μία συμβολοσειρά $w \in \{(,)\}^*$ είναι ισορροπημένη ανν:

   (α) 1) w έχει ίσο πλήθος «(» και «)»
   2) κάθε πρόθεμα της w έχει τουλάχιστον τόσα «(» όσα «)»

   (β) 1) η ε είναι ισορροπημένη
   2) αν η w είναι ισορροπημένη, τότε είναι και η (w)
   3) αν οι w, x ισορροπημένες τότε είναι και η wx
   4) τίποτε άλλο δεν είναι ισορροπημένη συμβολοσειρά

   Απόδειξε με επαγωγή ότι οι ορισμοί (α) και (β) ορίζουν την ίδια κλάση συμβολοσειρών.

5. Δείξε ότι το ακόλουθο είναι μία σχέση ισοδυναμίας και δώσε τις κλάσεις ισοδυναμίας:

   R είναι μία σχέση με ανθρώπους ορισμένη με $p\,R\,q$ ανν οι p και q έχουν γεννηθεί την ίδια ώρα της ίδιας μέρας του ίδιου έτους.

6. Βρες το μεταβατικό κλείσιμο, το ανακλαστικό και μεταβατικό κλείσιμο και το συμμετρικό κλείσιμο της σχέσης $\{(a,b),(b,c),(c,d),(f,d)\}$

7. Απόδειξε ότι το σύνολο όλων των ακεραίων είναι αριθμήσιμα άπειρο.

8. Απόδειξε ότι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών από φυσικούς αριθμούς είναι αριθμήσιμα άπειρο.

9. Απόδειξε ότι το σύνολο των ολικών συναρτήσεων $\{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ είναι μη αριθμήσιμο.

Κεφάλαιο 2

1.

Προφανώς, η ισότητα ισχύει για $n=0$.

Έστω ότι για $n=k$, έχουμε $\sum_{i=0}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Για $n=k+1$, έχουμε:

$$\sum_{i=0}^{n} i^2=\sum_{i=0}^{k+1} i^2=\sum_{i=0}^{k} i^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+k^2+2k+1=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+n^2-2n+1+2n-1=$$

$$=\frac{(n-1)n(2n-1)+6n^2}{6}=\frac{2n^3+n^2+n+2n^2}{6}=\frac{n^2(2n+1)+n(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2.

Προφανώς, η ισότητα ισχύει για $n=0$.

Έστω ότι για $n=k$, έχουμε $\sum_{i=0}^{n} i^3=\left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$.

Για $n=k+1$, έχουμε:

$$\sum_{i=0}^{n} i^3=\sum_{i=0}^{k+1} i^3=\sum_{i=0}^{k} i^3+(k+1)^3=\left(\sum_{i=0}^{k} i\right)^2+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=$$

$$=\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2+n^3=\frac{n^4-2n^3+n^2}{4}+n^3=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

3.

Κατά τη διαδικασία της επαγωγικής απόδειξης για $P[n]\Rightarrow P[n+1]$, γίνεται χρήση μιας αβάσιμης υπόθεσης, της $P[n-1]\Rightarrow P[n]$, η οποία δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί πριν αποδειχθεί ότι $P[n]\Rightarrow P[n+1]$.

4.

Η κενή συμβολοσειρά ε είναι ισορροπημένη, σύμφωνα και με τους δύο ορισμούς, αφού έχει ίσο (και μηδενικό) πλήθος από «(» και «)».

Έστω τώρα, ότι η συμβολοσειρά z είναι ισορροπημένη. Τότε θα έχει x σε πλήθος «(» και y σε πλήθος «)», όπου $x=y$. Επιπλέον, κάποιο πρόθεμά της έχει a σε πλήθος «(» και b σε πλήθος «)», όπου $a\geq b$.

Το πλήθος των «(» της συμβολοσειράς (z) είναι αυξημένο κατά ένα, δηλαδή είναι $x+1$. Το ίδιο και για το πλήθος των «)» της ίδιας συμβολοσειράς. Επομένως, τα «(» και «)» είναι ισοπληθή στην (z). Επιπλέον, για κάποιο πρόθεμα της (z) θα ισχύει $a+1\geq b$, όπου a είναι το πλήθος των «(» και b το πλήθος των «)» της z, με $a\geq b$. Επομένως, η (z) είναι κι αυτή ισορροπημένη.

Αν z και κ είναι δύο ισορροπημένες συμβολοσειρές, τότε η zκ θα έχει ίσο πλήθος από «(» και «)», αφού στα «(» και «)» της z προστίθεται ίσος αριθμός από «(» και «)». Επιπλέον, κάποιο πρόθεμα της zκ, αν έχει μήκος μικρότερο ή ίσο της z, τότε είναι προφανές ότι θα έχει τουλάχιστον τόσα «(» όσα «)». Αν έχει μεγαλύτερο μήκος από της z, τότε και πάλι θα έχει τουλάχιστον τόσα «(» όσα «)», αφού η z έχει ίσο πλήθος από «(» και «)» και οποιοδήποτε πρόθεμα της κ έχει τουλάχιστον τόσα «(» όσα «)». Έτσι, και η zκ είναι ισορροπημένη.

5.

Για να είναι η σχέση pRq σχέση ισοδυναμίας, θα πρέπει να ισχύουν η ανακλαστική, η συμμετρική και η μεταβατική ιδιότητα.

<u>Ανακλαστική</u>:

Ο p προφανώς έχει γεννηθεί την ίδια ώρα και μέρα με τον εαυτό του, επομένως pRp .

<u>Συμμετρική</u>:

Αν ο p έχει γεννηθεί ίδια ώρα και μέρα με τον q , τότε και ο q έχει γεννηθεί ίδια ώρα και μέρα με τον p . Άρα, $pRq \Rightarrow qRp$.

<u>Μεταβατική</u>:

Αν ο p έχει γεννηθεί ίδια ώρα και μέρα με τον q και ο q έχει γεννηθεί ίδια ώρα και μέρα με τον z , τότε και ο p έχει γεννηθεί ίδια ώρα και μέρα με τον z . Έτσι, $(pRq \wedge qRz) \Rightarrow pRz$.

Δημιουργούνται έτσι $7 \cdot 24 = 168$ κλάσεις ισοδυναμίας. Μία για κάθε ώρα κάθε ημέρας.

6.

Μεταβατικό κλείσιμο:

$\{(a,b),(b,c),(c,d),(f,d)\} \cup \{(a,c),(a,d),(b,d)\}$

Ανακλαστικό και μεταβατικό κλείσιμο:

$\{(a,b),(b,c),(c,d),(f,d)\} \cup \{(a,c),(a,d),(b,d)\} \cup \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(f,f)\}$

7.

Έστω απεικόνιση $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, με

$$f(n) = \begin{cases} 2n, n \geq 0 \\ -2n-1, n<0 \end{cases}$$

Η απεικόνιση είναι 1-1. Πράγματι, έστω $f(n_1) = f(n_2)$. Αν $n_1, n_2 \geq 0$, τότε $2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$. Αν $n_1, n_2 < 0$, τότε $-2n_1 - 1 = -2n_2 - 1 \Rightarrow n_1 = n_2$.

Επίσης, η απεικόνιση είναι επί, αφού $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{Z} : f(m) = n$. Πράγματι, αν ο η είναι άρτιος, τότε $m = \frac{n}{2}$, ενώ αν είναι περιττός, τότε $m = \frac{2n-1}{2}$.

8.

Το'χει αποδείξει ο Cantor (βλ. Ενότητα 4.1 «Απαρίθμηση ζευγών φυσικών αριθμών», του συγγράμματος «Υπολογισιμότητα και Πολυπλοκότητα» του Σ. Ζάχου).

9.

Έστω ότι το σύνολο των ολικών συναρτήσεων $\{f \mid f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμο. Τότε, υπάρχει ένας τρόπος αρίθμησής τους, ώστε κάθε τέτοια συνάρτηση να αντιστοιχεί σε έναν φυσικό αριθμό. Έτσι, ας θεωρήσουμε ότι η f_n αντιστοιχεί στον n , όπου προφανώς $n \in \mathbb{N}$. Στον παρακάτω πίνακα, φαίνονται όλες οι εξετασμένες συναρτήσεις και οι τιμές που παίρνουν $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{cccc} f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & \cdots \\ f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & \\ f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & \\ \vdots & & & \ddots \end{array}$$

Κατασκευάζοντας όμως την $h(x) = f_x(x) + 1$ προκύπτει μια νέα ολική συνάρτηση $h:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, η οποία είναι διαφορετική από κάθε άλλη συνάρτηση του πίνακα.Άρα, δεν είναι εφικτό να απαριθμηθούν όλες οι ολικές συναρτήσεις $\{f \mid f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ και συνεπώς το σύνολο αυτό είναι υπεραριθμήσιμο.