ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ, 12/7/2011

ΖΗΤΗΜΑ 1. Έστω ϕ προτασιακός τύπος στον οποίο εμφανίζονται μόνον οι προτασιακοί σύνδεσμοι $\wedge, \vee$ και $\neg$. Κατασκευάζουμε τον $\overline{\phi}$ ως εξής: Αντικαθιστούμε στον ϕ κάθε εμφάνιση του $\wedge$ με τον $\vee$, κάθε εμφάνιση του $\vee$ με τον $\wedge$ και κάθε εμφάνιση προτασιακής μεταβλητής A στον ϕ με τον $\neg A$. Ο προτασιακός τύπος $\overline{\phi}$ καλείται ο *δυαδικός* του ϕ. Να αποδειχθεί ότι $\overline{\phi}$ και $\neg\phi$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι.

Έστω τώρα ο προτασιακός τύπος $\psi \equiv (A_1 \to A_3) \vee A_2$, ο οποίος βέβαια περιέχει τον σύνδεσμο $\to$. Ποιος είναι ο δυαδικός του ψ;

ΖΗΤΗΜΑ 2. Έστω ότι ορίζουμε στον προτασιακό λογισμό ένα τυπικό σύστημα, έστω Q, ως εξής:

Λογικά αξιώματα: Όλοι οι προτασιακοί τύποι της μορφής

1. $\phi \to (\psi \to \phi)$
2. $(\neg\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \neg\psi) \to \phi)$

Κανόνες απαγωγής: Modus Ponens

Στο σύστημα αυτό Q ορίστε τί είναι απόδειξη από το σύνολο των μη λογικών αξιωμάτων T.

Αποδείξτε ότι αν σ' αυτό το σύστημα το σύνολο T είναι ασυνεπές, δηλαδή υπάρχει ψ ώστε $T \vdash \psi$ και $T \vdash \neg\psi$, τότε για κάθε προτασιακό τύπο ϕ έχουμε ότι $T \vdash \phi$. (εδώ το $\vdash$ σημαίνει «αποδεικνύεται στο Q»)

ΖΗΤΗΜΑ 3. Έστω Σ ένα σύνολο προτασιακών τύπων του προτασιακού λογισμού το οποίο είναι πλήρες και πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Χωρίς βεβαίως να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα της συμπάγειας, αποδείξτε ότι το Σ είναι ικανοποιήσιμο. Να διατυπώστε και αποδείξτε και το κύριο λήμμα που θα χρειαστείτε προς τούτο.

ΖΗΤΗΜΑ 4. Πότε μια θεωρία του πρωτοβάθμιου κατηγορηματικού λογισμού είναι θεωρία Henkin; Εξηγήστε αναλυτικά σε ποιό σημείο της απόδειξης του θεωρήματος της πληρότητας χρησιμοποιούνται οι σταθερές Henkin.

ΖΗΤΗΜΑ 5. Δείξτε (χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό του Tarski) ότι για κάθε τύπο ϕ ισχύει $\models \exists x(\phi \to \forall x\phi)$.

ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!