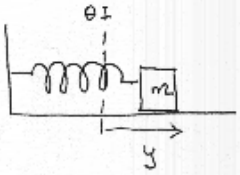
Παπαδόπουλος

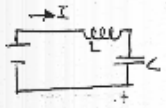
Ελεύθερες ταλαντώσεις απλών συστημάτων

Βαθμός

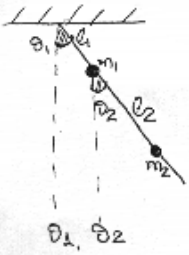
Βαθμός ελευθερίας είναι ο αριθμός των ανεξαρτήτων μεταβλητών που μονοσήμαντα ορίζουν τη θέση ενός συστήματος.

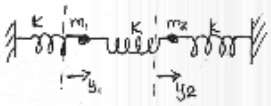
π.χ.

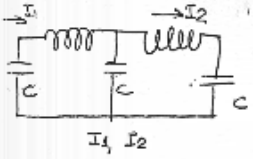




1 βαθμός ελευθερίας







2 βαθμοί ελευθερίας

Συμπεριφορά των συστημάτων αυτών καθορίζεται από 2 ενδογενείς ιδιότητες με ανεξάρτητες τάσεις

ΔΥΝΑΜΗ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ (ΔΕ) <=> ΑΔΡΑΝΕΙΑ

Η Δ.Ε. τείνει να φέρει το $\psi(\theta, \psi, Q, I, \dots) \xrightarrow{\text{στο}} 0$ επιβάλλοντας στο "κινητό" μέρος του συστήματος μια "ταχύτητα" $\frac{d\psi}{dt}$ ή $\dot{\psi}$

π.χ. για μικρό ψ ΔΕ $\sim -\psi$, όπως στο ελατήριο όπου $F=-k\psi$

Η αδράνεια αντιτίθεται σε κάθε μεταβολή της ταχύτητας $\frac{d\varphi}{dt}$

π.χ. Σε ένα κύκλωμα LC η δύναμη επαναφοράς οφείλεται στις δυνάμεις των ηλεκτρονίων που τείνουν να κατανεμηθούν ομοιόμορφα Β στις δυο πλάκες

ιι. Στο κύκλωμα LC η αδράνεια οφείλεται στην αυτεπαγωγή L που αντιτίθεται σε κάθε εταβολή του ρεύματος $\frac{d\varphi}{dt}$ $(\varphi \to Q)$

ια μηχανικά συστήματα εφαρμόζουμε συνήθως το Ν. Νεύτωνα

$m\gamma = F \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} = -Ky$. Άρα

$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{K}{m}y = 0}$ όπου K, m ανεξάρτητα του χρόνου

Εφαρμόζουμε το νόμο διατήρησης της ενέργειας $E = T + V$ όπου

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΟΡΟΣ (ΔΕ)	ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΟΣ ΟΡΟΣ (ΑΔΡΑΝΕΙΑ)
$V = \frac{1}{2}K\varphi^2$	$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$

$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}Ky^2 \overset{E=\text{σταθ}}{\Longrightarrow} \frac{dE}{dt} = 0 = 2\frac{m}{2}\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{K}{2}y\frac{dy}{dt} \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} + Ky = 0$

ταταλήγουμε για όλα τα συστήματα στη διαφορική εξίσωση της μορφής

$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0}$, $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ στα μηχαν. συστήματα (Ι)

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ (I)

Γραμμική ομογενής με σταθερούς συντελεστές

Η λύση έχει τη γενική μορφή $\varphi = e^{pt}$

$$\left.\begin{aligned} \dot{y} &= pe^{pt} = py \\ \ddot{y} &= p^2 e^{pt} = p^2 y \end{aligned}\right\} \text{ αντικατ. στην (I)} \Rightarrow y(p^2 + \omega_0^2) = 0 \overset{\text{γιατί}}{\Rightarrow} p^2 + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \text{χαρακτηριστική εξίσωση}$$

$$\Downarrow$$

$$p = \pm i\omega_0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = i\omega \Rightarrow y_1 = e^{i\omega_0 t} \\ p_2 = -i\omega \Rightarrow y_2 = e^{-i\omega_0 t} \end{cases}$$

Η γενική λύση είναι ο γρ. συνδυασμός $\varphi = A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}$

και επειδή $e^{i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t$ καταλήγω ότι

$e^{-i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t - i\sin\omega_0 t$

$\varphi(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$ Μορφή Α

$\varphi(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ Μορφή Β

$\varphi(t) = \mathrm{Re}\left(Be^{i\omega_0 t}\right)$, $B = Ae^{i\phi}$ Μορφή C

ΙΡΟΛΟΓΙΑ (2η μορφή Β) $y = A\cos(\omega t + \phi)$

y = πλάτος, μέγιστη απομάκρυνση

$\Phi(t) = \omega t + \phi$: φάση

για $t=0$ $\Phi(0) = \phi$: αρχική φάση

Τα A & ϕ βρίσκονται από τις αρχικές συνθήκες $y(0)$, $\dot{y}(0)$

$\omega = 2\pi\nu$: γωνιακή συχνότητα (rad/sec)

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$: περίοδος Α.Α.Τ.

ν : συχνότητα (Hz ή s^{-1})

ΠΡΟΣΟΧΗ # Η ω δε σχετίζεται με τις αρχικές συνθήκες, αλλά με τις φυσικές ιδιότητες του συστήματος.

ω^2 = δύναμη επαναφοράς ανά μονάδα μετατόπισης & ανά μονάδα μάζας.

π.χ. $\omega^2 = \frac{F}{\text{μετατόπιση}} = \frac{ky}{ym} = \frac{k}{m}$ (για το ελατήριο)

Σε μη μηχανικά συστήματα ο όρος μετατόπιση & μάζα δεν αντιστοιχεί σε συμβατικούς

ΤΑΧΥΤΗΤΑ & ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΤΗΝ Α.Α.Τ.

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ: $y(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ : $\frac{dy}{dt} = \dot{y} = v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi + \frac{\pi}{2})$

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ: $\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi + \pi)$

A : πλάτος μετατόπισης

$A\omega_0$: -//- ταχύτητας

$A\omega_0^2$: -//- επιτάχυνσης

Διαφορά φάσης ταλάντωσης που έχουν την ίδια συχνότητα: $\Delta\Phi_{21} = \Phi_2 - \Phi_1 = (\omega_0 t + \phi_2) - (\omega_0 t + \phi_1) = \phi_2 - \phi_1$

Η v προηγείται της y κατά $\pi/2$ rad

Η a -//- y -//- π rad

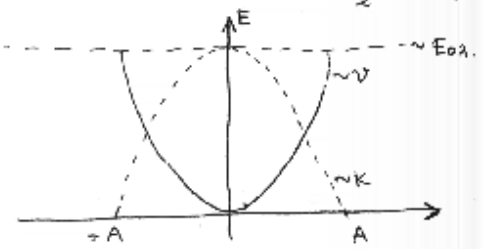
Για y_{max} : $v=0$, a_{max} αλλά με αντίθετο πρόσημο $(y+ \; a\,(-))$

Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΕΝΟΣ (Α.Α.Τ.)

Κινητική ενέργεια : $K=\frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \frac{1}{2}m A^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t+\phi) = \frac{1}{2}m\omega_0^2(A^2-y^2)$

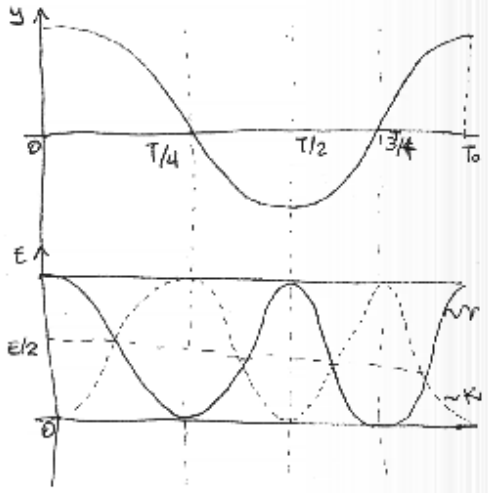
Δυναμική -//- : $U=\frac{1}{2}Ky^2 = \frac{1}{2}m A^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t+\phi) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 y^2$

Ολική ενέργεια: $E=K+U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A = K_{max}=U_{max}=$ σταθερά



Για $y=0$: $K=K_{max}=E$, $U=0$

Για $y=\pm A$: $K=0$, $U=U_{max}=E$

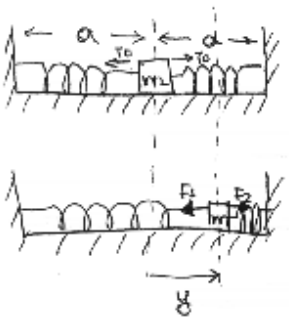


$$U=E\left[\frac{1+\cos(\omega_0 t+\phi)}{2}\right]$$

$$K=E\left[\frac{1-\cos(\omega_0 t+\phi)}{2}\right]$$

$\omega=\omega_0/2$ $\quad T=T_0$

4.



Θεωρώ ως το φυσικό μήκος του ελατηρίου

$$T_0 = k(a - a_0)$$

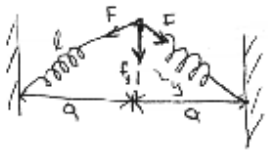
$$F_1 = k(a + y - a_0) = T_0 + ky$$

$$F_2 = k(a - y - a_0) = T_0 - ky$$

$$F_{ολ} = F_2 - F_1 = -2ky = -Dy$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2ky \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2k}{m}y = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k}{m}$$

5.



$$F_y = -2F\sin\theta = -2F\frac{y}{\ell} = -2k(\ell - a_0)\frac{y}{\ell} = -2ky\left(1 - \frac{a_0}{\ell}\right)$$

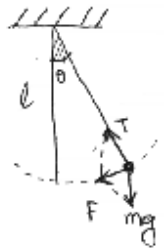
ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΙΚΡΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ με $y \ll a$

$$\ell = \sqrt{y^2 + a^2} = a\sqrt{1 + (y/a)^2} = a\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \dots\right) = a$$ (Γραμμικοποίηση)

Άρα $F_y = -2ky\left(1 - \frac{a_0}{\ell}\right) = -2k\left(\frac{a - a_0}{a}\right)y = -\frac{2T_0}{a}y$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2T_0}{a}y \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2T_0}{ma}y = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2T_0}{ma}$$

7.

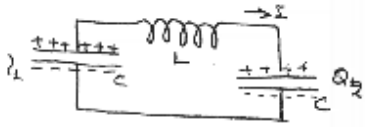


$\theta \ll \ell \Rightarrow \sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$

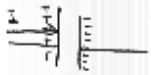
$F = -mg\sin\theta \simeq -mg\theta = -mg\frac{y}{\ell}$, όπου y μετατόπιση από σφαίρα

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg\frac{y}{\ell} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + g\frac{y}{\ell} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{\ell}$$

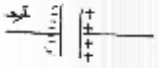
1. Κύκλωμα L-C



1. Ορίζουμε αυθαίρετα τη φορά του I
2. -//- -//- το πρόσημο στους πυκνωτές
3. Η πτώση τάσης στον πυκνωτή είναι



$V_C = -\frac{Q}{C}$ & $I = \frac{dQ}{dt}$



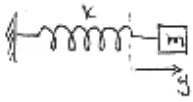
$V_C = -\frac{Q}{C}$ & $I = -\frac{dQ}{dt}$

Νόμος Kirchoff: $V_L + V_2 + V_1 = 0$

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q_2}{C} - \frac{Q_1}{C} = 0 \quad , \quad Q_1 + Q_2 = \text{σταθ} \Rightarrow \frac{dQ_2}{dt} = -\frac{dQ_1}{dt}$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} - \frac{1}{C}\left(\frac{dQ_2}{dt} - \frac{dQ_1}{dt}\right) = 0 \Rightarrow L\frac{d^2I}{dt^2} - \frac{2}{C}\frac{dQ_1}{dt} = 0 \Rightarrow L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{2}{C}I = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2}{LC}$$

ΑΝΑΛΟΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ



$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}Ky^2$ (1)

$E = \text{σταθ} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$ (2)

$m\ddot{y} + Ky = 0$ (3)

$\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ (4)

L-C

$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$

$E = E_L + E_C = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}L\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ (1')

$E = \text{σταθ} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$ (2')

$L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$ (3')

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ (4')

από τη σύγκριση των σχέσεων

Αδράνεια $m \longleftrightarrow L$

Δύναμη $k \longleftrightarrow 1/C$

Μετατόπιση $y \longleftrightarrow Q$

Ταχύτητα $\dot{y} \longleftrightarrow \dot{Q} = I$

ισ. επαναφοράς $ky \longleftrightarrow \frac{1}{C} Q = V_C$ (Διαφορά δυναμικού η ηλεκτρική δύναμη)

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΘΕΣΗΣ (§ 1.3 Βοτ)

Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (Γ.Δ.Ε.) έχουν τη μορφή

$$L(y) = A_0 y + A_1 \frac{dy}{dt} + A_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \cdots + A_n \frac{d^n y}{dt^n} = \begin{cases} 0, & \text{ομογενής} \\ f(t), & \text{μη ομογενής} \end{cases}$$

περιέχουν <u>μόνο</u> πρώτες δυνάμεις του y & των παραγώγων του y ($\dot{y}, \ddot{y}, \ldots, y^{(n)}$)

π.χ.

ΜΗ Γ.Δ.Ε. είναι η $A_0 y + A_1 \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + A_2 \frac{d^2y}{dt^2} + A_3 y^2 = f(t)$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ Γ.Δ.Ε.

1. Αρχή της υπέρθεσης (Για ομ. ΓΔΕ)

Αν y_1, y_2 λύσεις της $L(y)=0 \Rightarrow y = \alpha y_1 + \beta y_2$ λύση της $L(y)=0$

2. Για μη ομογενείς ΓΔΕ.

Αν y_1 λύση της $L(y) = f_1$: $L(y_1) = f_1$

και y_2 λύση της $L(y)=f_2$: $L(y_2)=f_2$

τότε y_1+y_2 -//- $L(y)=f_1+f_2$: $L(y_1+y_2)=f_1+f_2$

Αν για διέγερ. σήματα $f_1(t)$ παράγει μια απάντηση $y_1(t)$

-//- $f_2(t)$ -//- $y_2(t)$

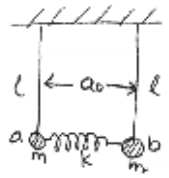
Αν οι σήματα ενεργούν $f_1(t)+f_2(t)$ -//- $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$ ταυτόχρονα

Γενική λύση της $L(y)=f$ είναι $y=y_0+y_1$

όπου y_0 η λύση της ομογενούς $L(y_0)=0$

& y_1 μια μερική λύση της $L(y)=f$

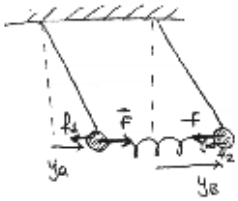
ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΑ ΕΚΚΡΕΜΗ



a_0 = φυσικό μήκος του ελατηρίου. Με αυτές τις παρατ. θελ. να βρεθούν τα $y_a(t)$, $y_\beta(t)$ για μικρές απομακρύνσεις

Το μήκος του ελατηρίου $a = a_0 + y_\beta - y_a$, $F = k(a - a_0) = k(y_\beta - y_a)$

$f = -\frac{mg}{l} y$: Η δύναμη λόγω του υπόβ. βαρύτητας.



$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2 y_a}{dt^2} &= F - f_1 = k(y_\beta - y_a) - \frac{mg}{l} y_a \\ m\frac{d^2 y_\beta}{dt^2} &= -F - f_2 = k(y_a - y_\beta) - \frac{mg}{l} y_\beta \end{aligned}\right\} (1)$$

Από (+) των (1)

Από (−) των (1) έχω

$$\frac{\partial^2 (y_a - y_\beta)}{\partial t^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)(y_a - y_\beta) = 0$$

Θέτω $\left.\begin{aligned} y_1 &= y_a + y_\beta \\ y_2 &= y_a - y_\beta \end{aligned}\right\}$ (3) και (2) $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \frac{g}{l} y_1 = 0 \\ &\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right) y_2 = 0 \end{aligned}\right\}$ (4)

Α.Α.Τ. με $y_1 = A\cos(\omega_1 t + \phi_1)$, $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$

$y_2 = B\cos(\omega_2 t + \phi_2)$, $\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$

$$\left.\begin{aligned} y_a &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2} A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{1}{2}(A_2)\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ y_\beta &= \frac{1}{2}(y_1 - y_2) = \frac{1}{2} A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_2) - \frac{1}{2} A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}\right\} (6)$$

Παρατηρήσεις

α) Οι συνιστώσες y_1 & y_2 ονομάζονται κανονικές συνιστώσες (ΚΣ) & οδηγούν σε ΔΕξ. με μια εξαρτημένη μεταβλητή.

β) Η ταλάντωση που περιγρ. από ΚΣ κανονικός τρόπος ταλάντωσης (ΚΤΤ)

γ) Ο Κ.Τ.Τ. έχει τη δική του ω & φ με την οποία ταλαντώνονται όλα τα μέρη του συστήματος

δ) Η γενική λύση είναι υπέρθεση του ΚΤΤ.

ε) Με κατάλ. αρχικές συνθήκες το σύστημα μπορεί να ταλαντώνεται σε ΚΤΤ. με αντίστοιχη συχ

ζ) Η ολική ενέργεια $E=(\alpha y_1^2+\beta y_1^2)+(c y_2^2+d y_2^2)$ & γενικότερα οι ΚΤΤ είναι ανεξάρτητοι μεταξύ δεν ανταλάσσουν ενέργεια.

η) Εξ. (1) μπορούν να γραφούν

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\left(\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}\right)y_a+\frac{k}{m}y_b\\ \frac{d^2y_2}{dt^2} &= \frac{k}{m}y_a-\left(\frac{g}{\ell}+\frac{k}{m}\right)y_b\end{aligned}\right\}\ (7)$$

Γενίκευση: για συστήματα με 2 βαθμούς ελευθερίας

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2y_a}{dt^2} &= -a_{11}y_a-a_{12}y_b\\ \frac{d^2y_b}{dt^2} &= -a_{21}y_a-a_{22}y_b\end{aligned}\right\}\ (8)$$

Έχω ότι το σύστημα μας εκτελεί ταλάντωση σε ένα ΚΤΤ. Δηλαδή ότι οι δυο μεταβλητές y_a & y_b εκτελούν Α.Α.Τ. με την ίδια συχνότητα ω & φ.

$$\left.\begin{aligned}y_a &= A\cos(\omega t+\phi)\\ y_b &= B\cos(\omega t+\phi)\end{aligned}\right\}\ (9)$$ Παραγωγίζω & αντικαθιστώ στις εξισώσεις (8)

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\omega^2)A+a_{12}B&=0\\ a_{21}A+(a_{22}-\omega^2)B&=0\end{aligned}\right\}\ (10) \Rightarrow \begin{bmatrix}a_{11}-\omega^2 & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\omega^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}=0$$

$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$ μη αποδεκτή φυσική λύση ⇒ ο άξονας κίνησης είναι μηδενικός

ή $(a_{11}-\omega^2)(a_{22}-\omega^2) - a_{12}a_{21} = 0$ (11)

Εξίσωση 2ου βαθμού ως προς τη μεταβλητή ω^2 ⇒ 2 λύσεις ω_1^2 & ω_2^2 με 2 βαθμούς ελευθερίας

ω_1^2 = φυσική συχνότητα του 1ου ΚΤΤ

ω_2^2 = -//- -//- του 2ου ΚΤΤ

$$B/A = \frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}} \Rightarrow \begin{cases} (B/A)_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_2}{\omega_1^2 - a_{22}} \\ (B/A)_2 = \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega_2^2 - a_{22}} \end{cases}$$

Γενικές λύσεις

$$y_A(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) = y_1 + y_2$$

$$y_B(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1)\left(\frac{B_1}{A_1}\right) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)\left(\frac{B_2}{A_2}\right) = \frac{B_1}{A_1}y_1 + \frac{B_2}{A_2}y_2$$

(*) Υπάρχουν 8 σταθερές

A_1, A_2, ϕ_1, ϕ_2 ορίζονται από τις αρχικές συνθήκες $y_A(0)$, $y_B(0)$, $\dot{y}_A(0)$, $\dot{y}_B(0)$

) ω_1, ω_2 λέγονται ιδιοσυχνότητες

Οι λόγοι $\frac{B_1}{A_1}$, $\frac{B_2}{A_2}$ λέγονται χαρακτηριστικοί συντελεστές ∀ ΚΤΤ

Είναι ανεξάρτητοι των αρχικών συνθηκών & χαρακτηρίζουν τη φυσική, τη συνοχική του κάθε συγκεκριμένου συστήματος.

Λύνοντας τις τελευταίες εξισώσεις ως προς y_A & y_B βρίσκω τις κ.σ.

$$y_1 = \frac{\frac{B_2}{A_2}y_A - y_B}{\frac{B_2}{A_2} - \frac{B_1}{A_1}}, \quad y_2 = \frac{\frac{B_1}{A_1}y_A - y_B}{\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2}}$$

κ.σ.

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \omega_1^2 y_1 = 0$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} + \omega_2^2 y_2 = 0$$

ΤΣΑΡΤΟΥΛΗΣ

Στο αρχικό μας παράδειγμα, $a_{11} = a_{22} = g/\ell + k/m$ & $a_{12} = a_{21} = -k/m$

$$\left(\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 - \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} - \omega^2 = \pm \frac{k}{m} \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} - \frac{k}{m} = \frac{g}{\ell}, & \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{g/\ell - g/\ell - k/m}{-k/m} = 1 \\ \omega_2^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} + \frac{k}{m} = \frac{g}{\ell}, & \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{g/\ell + 2k/m - g/\ell - k/m}{-k/m} = -1 \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{-y_a - y_b}{-1-1} = \frac{1}{2}(y_a + y_b)$$

$$y_2 = \frac{y_a - y_b}{1-(-1)} = \frac{1}{2}(y_a - y_b)$$

"ΦΥΣΙΚΟΣ" ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (2 συζευγ. εκκρεμών)

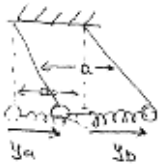
1) 2 βαθμοί ελευθερίας ⇒ 2 ΚΤΤ

2) Σε ∀ ΚΤΤ όλα τα μέρη κινούνται με την ίδια ω

$$\omega^2 = \frac{\text{Δυν. επαν.}}{\text{Κιν. μάζας ή ροπής}} = \frac{|F|}{mg}$$

3) Στο παράδειγμά μας $m_a = m_b = m$ ⇒ πρέπει να αναζητήσω εκκρεμείς που έχουν την ίδια $\frac{|F|}{m}$

α τρόπος (ΚΤΤ)



$y_a = y_b$

$a = a_0 \Rightarrow F_{el} = k(a - a_0) = 0$

$$\left.\begin{aligned} F_a = F_{\text{βαρ}} = -\frac{mg}{\ell} y_a \Rightarrow \omega_a^2 = \frac{|F|}{m y_a} = \frac{\frac{m}{\ell} g\, y_a}{m y_a} = g/\ell \\ F_b = F_{\text{βαρ}} = -\frac{mg}{\ell} y_b \Rightarrow \omega_b^2 = \frac{|F|}{m y_b} = \frac{\frac{mg}{\ell} y_b}{m y_b} = g/\ell \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega_a^2 = \omega_b^2 = \omega^2 = \frac{g}{\ell}$$

ΒΙΑΜΑΚΕΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ 2 ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΩΝ ΜΑΖΩΝ

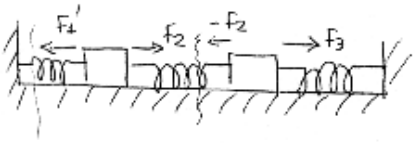
<u>Προσοχή</u>: Προσέξτε ότι οι Δ.Ε. δεν περιέχουν τω τα. Μπορώ να ελέγξω με βάση τις θέσεις ισορ.

π.χ. $F_1' = -ky_a$, είναι να επαναφέρει το α

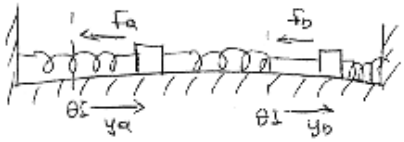
$F_2' = k(y_b - y_a)$

$-F_2' = -k(y_b - y_a)$, να επαναφέρει το b στη Θ.Ι.

$-F_3 = ky_b$, είναι να επαναφέρει το b στη Θ.Ι.



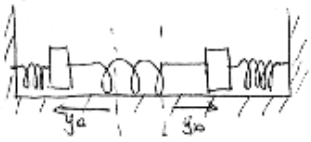
<u>1ος Κ.Τ.Τ</u>



$y_a = y_b \Rightarrow \frac{B}{A} = 1$

$\left.\begin{array}{l} F_a = -ky_a \\ F_b = -ky_b \end{array}\right\} \Rightarrow F_a = F_b, \quad \omega^2 = \frac{|F|}{my} = \frac{ky_a}{my_a} = \frac{k}{m}$

<u>2ος ΚΤΤ</u>



$y_a = -y_b$

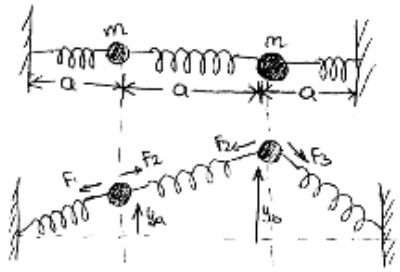
$\frac{B}{A} = -1, \quad \left.\begin{array}{l} F_a = -3ky_a \\ F_b = -3ky_b \end{array}\right\} \Rightarrow |F_a| = |F_b| \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{|F|}{my} = \frac{3ky_a}{my_a} = \frac{3k}{m}$

<u>ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ</u>

$y_a(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) = y_1 + y_2$

$y_b(t) = \frac{B_1}{A_1} A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{B_2}{A_2} A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) = y_1 - y_2$

ΕΓΚΑΡΣΙΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ 2 ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΩΝ ΜΑΖΩΝ



ΓΕΝΙΚΑ: $F_{1y} = F_1 \sin\theta_1 = F_1 \frac{y_a}{\ell} = K(\ell - a_0)\frac{y_a}{\ell}(\ell - a)$

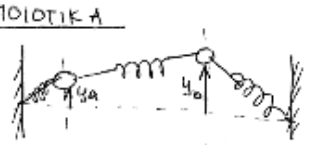
$= K(a - a_0)\frac{y_a}{a} = \frac{T_0}{a} y_a$

Βρίσκω εξισώσεις κίνησης:

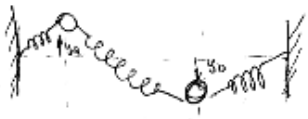
$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2y_a}{dt^2} &= -F_{1y} + F_{2y} = -\frac{T_0}{a}y_a + \frac{T_0}{a}(y_b - y_a) \\ m\frac{d^2y_b}{dt^2} &= -F_{3y} - F_{2y} = -\frac{T_0}{a}y_b - \frac{T_0}{a}(y_b - y_a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y_a &= A\cos(\omega t \\ y_b &= B\cos(\omega t + \end{aligned}$$

(πρόχωρά με μαθηματικά για να ω_1, ω_2)

ΠΟΙΟΤΙΚΑ

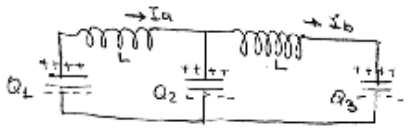


1ος ΚΠΤ.



2ος ΚΠΤ $\quad y_a = -y_b \Rightarrow \ldots \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{3T_0}{ma} = 3\omega_1^2$

2 ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ LC (πρβλ. 3.62-Pain)



1) Εφαρμόζουμε τον Ν. Kirchhoff στα 2 κυκλώματα

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\text{1ος βρόχος}}: \quad L\frac{dI_a}{dt} + \frac{Q_2}{C} - \frac{Q_1}{C} = 0 \\ &\underline{\text{2ος βρόχος}}: \quad L\frac{dI_b}{dt} + \frac{Q_3}{C} - \frac{Q_2}{C} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Ταυτό στοιχείο: $Q_1 + Q_2 + Q_3 = \text{σταθ.}$

Τελικά παραγωγίζω τις εξισώσεις (I): $L\frac{d^2I_a}{dt^2} + \frac{dQ_2}{Cdt} - \frac{dQ_1}{Cdt} = 0$ & $L\frac{d^2I_b}{dt^2} + \frac{dQ_3}{Cdt} - \frac{dQ_2}{Cdt} = 0$

Αλλά $\left.\begin{array}{l} \dfrac{dQ_1}{dt} = -I_a \\ \dfrac{dQ_3}{dt} = I_b \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{dQ_3}{dt} = -\dfrac{dQ_2}{dt} - \dfrac{dQ_1}{dt} = -(I_b - I_a)$

Άρα $\left.\begin{array}{l} L\dfrac{d^2 I_a}{dt^2} = -\dfrac{1}{C} I_a + \dfrac{1}{C}(I_b - I_a) \\ L\dfrac{d^2 I_b}{dt} = -\dfrac{1}{C} I_b - \dfrac{1}{C}(I_b - I_a) \end{array}\right\}$ (III)

Ψαχνούμε ρυθμικά, δηλ.

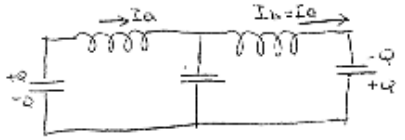
Σε ΚΤΤ. $I_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi)$

$I_b = B_1 \cos(\omega_1 t + \phi)$

Στο ΚΤΤ. $I_a = I_b \rightarrow Q_1 = -Q_3$

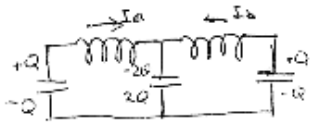
$Q_2 = 0$

$\omega_1^2 = \dfrac{1}{LC}$



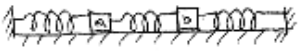
Στο ΚΤΤ. $I_a = -I_b \Rightarrow Q_1 = Q_3,\ Q_2 = 2Q_1$

$\omega_2^2 = 3/LC = 3\omega_1^2$



ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΓΙΑ ΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Α, Β, Γ, Δ

Α



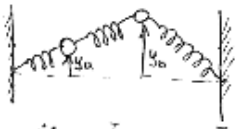
$$m\frac{d^2y_a}{dt^2} = -ky_a + k(y_b - y_a)$$

$$m\frac{d^2y_b}{dt^2} = -ky_b - k(y_b - y_a)$$

1ος ΚΤΤ : $y_a = y_b$, $\omega_1^2 = k/m$

2ος ΚΤΤ : $y_a = -y_b$, $\omega_2^2 = 3k/m$

Β



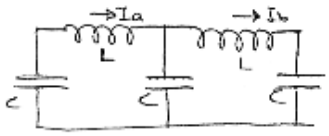
$$m\ddot{y}_a = -\frac{T_0}{a}y_a + \frac{T_0}{a}(y_b - y_a)$$

$$m_b\ddot{y}_b = -\frac{T_0}{a}y_b - \frac{T_0}{a}(y_b - y_a)$$

1ος ΚΤΤ $y_a = y_b$, $\omega_1^2 = T_0/ma$

2ος ΚΤΤ $y_a = -y_b$, $\omega_2^2 = \frac{3T_0}{ma} = 3\omega_1^2$

Γ



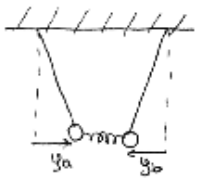
$$L\ddot{I}_a = -\frac{1}{C}I_a + \frac{1}{C}(I_b - I_a)$$

$$L\ddot{I}_b = -\frac{1}{C}I_b - \frac{1}{C}(I_b - I_a)$$

1ος ΚΤΤ $I_a = I_b$, $\omega_1^2 = \frac{1}{LC}$

2ος ΚΤΤ $I_a = -I_b$, $\omega_2^2 = \frac{3}{LC} = 3\omega_1^2$

Δ



$$m\ddot{y}_a = -\frac{mg}{\ell}y_a + k(y_b - y_a)$$

$$m\ddot{y}_b = -\frac{mg}{\ell}y_b - k(y_b - y_a)$$

1ος ΚΤΤ $y_a = y_b$
$\omega_1^2 = \frac{g}{\ell}$

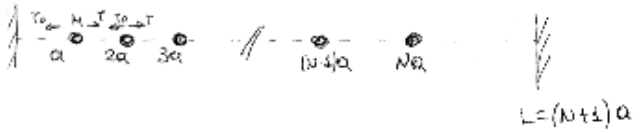
2ος ΚΤΤ $\omega_2^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}$

ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΓΙΑ ΟΛΑ ΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

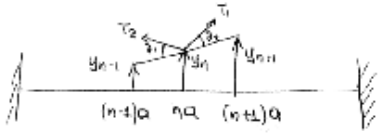
$$y_a = A\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$y_b = A\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Εγκάρσιες ταλαντώσεις με σφαιρίδια



Η χορδή αντιμετωπίζεται σαν ελατήριο που ακολουθεί το ν. Hooke.



Η δύναμη στο ν σφαιρίδιο είναι F

$$F_{ny} = -\left(T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2\right) = -\left(T_1 \cos\theta_1 \tan\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 \tan\theta_2\right)$$

$T_{12} = T_1 \cos\theta_1 = k\,(l - a_0)\frac{a}{l} = k\,(a - a_0) \simeq T_0\,(l - a)$ για μικρές απομακρύνσεις

$\tan\theta_1 = \frac{y_1 - y_{2+1}}{a}$

$\tan\theta_2 = \frac{y_n - y_{n-1}}{a}$

$$m\frac{d^2 y_n}{dt^2} = T_0\left[\frac{y_{n+1}(t) - y_n(t)}{a}\right] - T_0\left[\frac{y_n(t) - y_{n-1}(t)}{a}\right]$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{T_0}{ma}\left[y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}\right] \quad (I)$$

Σε ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης όλα τα σωματίδια κινούνται με την ίδια ω & φ

Επομένως $y_n = A_n \cos(\omega t + \phi)$, όπου A_n η μέγιστη απομάκρυνση για τη ν-οστή μάζα.

Αντικαθιστώ στην (I) & έχω: $A_{n+1} + A_{n-1} = A_n\left(2 - \frac{Ma}{T_0}\omega^2\right)$

Επίσης $2 - \frac{ma}{T_0}\omega^2 = c = 2\cos\theta$

$\omega^2 = \frac{2T_0}{ma}(1-\cos\theta) = 2\frac{T_0}{ma}2\sin^2\theta/2 = \frac{4T_0}{ma}\sin^2\frac{\theta}{2}$, θέτω $\omega_0^2 = \frac{T_0}{ma}$

& έχω $\omega = 2\omega_0 \sin\frac{\theta}{2}$

Τελικά καταλήγουμε $\omega = 2\omega_0 \sin\theta/2$ ή αν κάνω την αντικατάσταση $\theta = ka$

$A_n = A\sin(n\theta) + B\cos(n\theta)$

(Η αδιάστατη ποσότητα, μετρά την φάση, επομένως το k έχει διαστάσεις L^{-1} & λέγεται κυματικός αριθμός)

$\omega = 2\omega_0 \sin\frac{ka}{2}$ & $A_n = A\sin(nka) + B\cos(nka) \rightarrow$ μορφή του κ.τ.τ.

↳ Σχέση διασποράς

$y_n = A_n\cos(\omega t + \phi) = [A\sin(nka) + B\cos(nka)]\cos(\omega t + \phi)$

ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Οι τιμές του θ_n, ka θα ορισθούν από τις οριακές συνθήκες.

π.χ. για πακτωμένη άκρη στο $z=0$ & στο $z=L=(n+1)a$ έχουμε $y=0\ \forall t \Rightarrow A_0 = 0$ & $A_{n+1}=0$

($z = na \rightarrow z=0 \rightarrow n=0$)

για $n=0$ $A_0 = A\sin 0 + B\cos 0 = 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0$

Επομένως $A_n = A\sin(nka)$

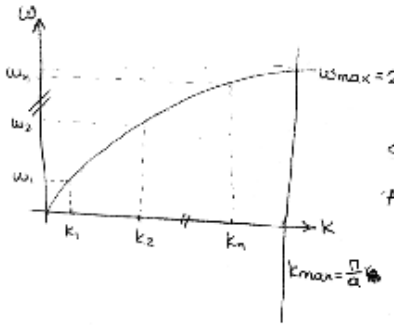
για $n = N+1$, $A_{N+1} = A\sin(N+1)ak = A\sin Lk = 0 \Rightarrow kL = s\pi \Rightarrow k_s = s\frac{\pi}{L} = s\frac{\pi}{(N+1)a}$, $s=1,\dots,N$

(k_s οι επιτρεπτές τιμές του k)

Επιτρεπτές τιμές του ω

$\omega_s = 2\omega_0 \sin\frac{k_s a}{2} = 2\omega_0 \sin s\frac{\pi}{2(N+1)}$, $s = 1, 2, \dots, N$

ω_s ονομάζονται ιδιοσυχνότητες του συστήματος

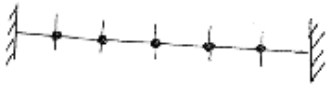


$\omega_{max} = 2\omega_0 = 2\sqrt{\frac{T}{ma}}$

$\sin\frac{ka}{2} = 1 \Rightarrow \frac{ka}{2} = \frac{\pi}{2}$

Άρα $k_{max} = \frac{\pi}{a}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΓΙΑ N=5 ελεύθερα



$\omega_s = 2\omega_0 \sin\frac{k_s a}{2}$ $\quad A_n = A\sin(n k_s a)$ $\quad \omega_0^2 = T_0/ma$

Επιτρεπτές τιμές k, $k_s = \frac{s\pi}{(N+1)a}$ $\quad s = 1,2,3,4,5$

$$k_s = \frac{\pi}{6a},\ 2\left(\frac{\pi}{6a}\right),\ 3\left(\frac{\pi}{6a}\right),\ 4\left(\frac{\pi}{6a}\right),\ 5\left(\frac{\pi}{6a}\right)$$

1ος ΚΤΡ

$k_1 = \frac{\pi}{6a} \Rightarrow \omega_1^2 = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{6a}\frac{a}{2}\right) = 2\omega_0 \sin\frac{\pi}{12}$

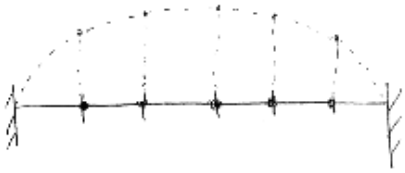
$A_1 = A\sin k_1 a = A\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5A$

$A_2 = A\sin 2k_1 a = A\sin 2\frac{\pi}{6} = 0{,}87A$

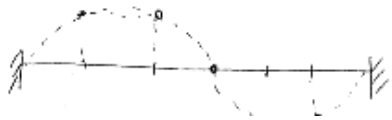
$A_3 = A\sin 3k_1 a = A\sin 3\frac{\pi}{6} = 1{,}00A$

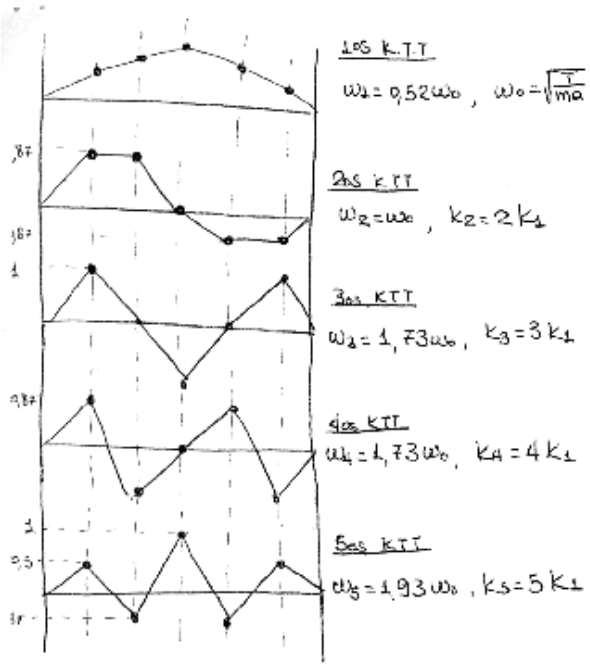
$A_4 = A\sin 4k_1 a = A\sin 4\frac{\pi}{6} = 0{,}87A$

$A_5 = A\sin 5k_1 a = 0{,}5A$



2ος ΚΤΡ





ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Μερικά σημεία ακίνητα $\forall t$, ονομάζονται δεσμοί

Αρ. δεσμών $(N_s) = s-1$ $\quad s \to$ ΚΤΤ

π.χ. για $s=1$ $\quad N_s = 1-1 = 0$

$s=2$ $\quad N_s = 2-1 = 1$

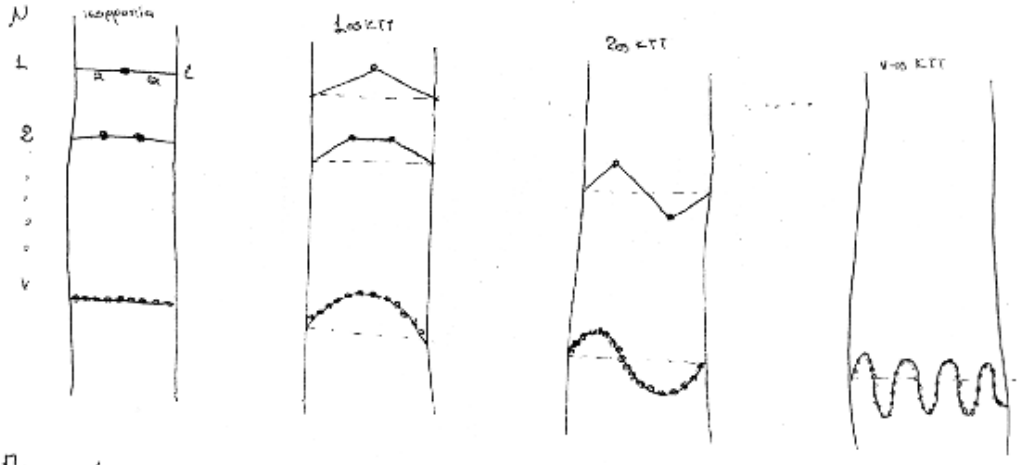
$s=5$ $\quad N_s = 5-1 = 4$

2) Μερικά σωματίδια έχαν αρνητικό πλάτος ⇒ θα κινούνται με $\Delta\phi = 180°$ ⇒ Ίδια διαμόρφωση

Σε $\forall$ ΚΤΤ τα σωμάτια κινούνται με την ίδια ω & $\Delta\phi$ $0°$ ή $180°$ ⇒ $\cos(\omega t+\phi)$ ή $\cos(\omega t+\phi+180°)$

$= -\cos(\omega t+\phi)$

Το (-1) θα ενσωματ. στο πλάτος (αρνητικός πλάτος) & μιλάμε για $\Delta\phi = 0$



Παρατηρήσεις

1) $N \to \infty$, ℓ πεπερασμένο: α) $a \to 0$

β) $\left[\vec{y}_a(t) \approx \vec{y}_b(t) \approx \vec{y}_c(t) \approx \cdots \approx \vec{y}_k(t) \right] \Rightarrow \vec{y}(x,y,z,t) = \hat{x}\, y_x(x,y,z,t) + \hat{y}\, y_y(x,y,z,t) + \hat{z}\, y_z(x,y,z,t)$

Όταν ισχύουν τα (α) & (β) δείχνει ότι το σύστημα συμπεριφέρεται σα συνεχές.

όπου τα σημεία $[a, b, c, \ldots, k] \Rightarrow$ στο "σημείο" (x, y, z)

) Οι εκφράσεις "ΣΗΜΕΙΟ" ή "ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ" $\Rightarrow$ Όχι σε μαθηματικό σημείο αλλά φυσικό σημείο (με την έννοια που είπαμε προηγούμενα)

) Επίσης dx ή $dV \Rightarrow$ "ΦΥΣΙΚΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΑ" $a < dx \ll \ell$ (α διαστάσεις των μορίων)

) ΠΡΟΣΟΧΗ: $x, y, z \Rightarrow$ 3ες ΘΕΣΕΙΣ ισορροπίας των "σωματιδίων", όχι συναρτήσεις του χρόνου

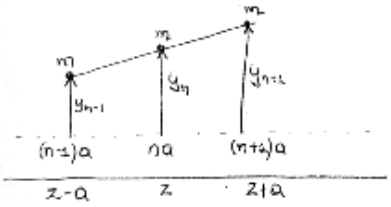
1α μονοδιάστατη χορδή (z) $\vec{y}(z,t) = \hat{x}\, y_x(z,t) + \hat{y}\, y_y(z,t) + \hat{z}\, y_z(z,t)$

$z \Rightarrow$ διαμήκεις παραμορφώσεις

$y_y \Rightarrow$ εγκάρσιες —"—

Αν $y_z = y_x = 0 \;\; \forall t$ & $y_y \neq 0 \Rightarrow$ γραμμικά πολωμένες παραμορφώσεις στον άξονα y.

ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (Pain 37, Βλ. Ασκηση 2,18)



$$m\frac{d^2y_n(t)}{dt^2} = T_0\left[\frac{y_{n+1}-y_n}{a}\right] - T_0\left[\frac{-y_n-y_{n-1}}{a}\right]$$

$na \to z \quad (n+1)a = z+a \quad (n-1)a = z-a \quad y_n(t) \to y(z,t)$

$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{ma}\left[\left(y(z+a,t)-y(z,t)\right)+\left(y(z-a,t)-y(z,t)\right)\right]$$

$$y(z+a,t) = y(z,t) + a\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{a^3}{3!}\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} + \frac{a^4}{4!}\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}$$

$$y(z-a,t) = y(z,t) - a\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{a^3}{3!}\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} + \frac{a^4}{4!}\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{ma}\left[a^2\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} + \frac{a^4}{12}\frac{\partial^4 y(z,t)}{\partial z^4}\right]$$

Για $\frac{a^2}{12}\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} << \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial z} \sim k$, $ak << 1$, $a << \lambda$

καταλήγω στην κλασσική ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2}, \quad \rho_0 = \frac{m}{a}$$

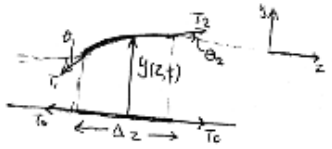
Ψάχνω $A_n = A\sin kna + B\cos kna \Rightarrow m\frac{d^2y_n(t)}{dt^2} = T_0\left[\frac{y_{n+1}-y_n}{a}\right] - T_0\left[\frac{y_n-y_{n-1}}{a}\right]$

$$A(z) = A\sin kz + B\cos kz$$

$$y(z,t) = A(z)\cos(\omega t+\phi)$$

Τέλος, όταν ισχύουν τα προηγούμενα, δηλ. οι ταλαντώσεις γίνονται σε ένα ΣΥΝΕΧΕΣ ΜΕΣΟ, μιλάμε για ΚΥΜΑΤΑ. Οι κτ. ταλαντώσεις ενός συνεχούς μέσου ονομάζονται ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

ΕΓΚΑΡΣΙΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ~~[illegible]~~ ΧΟΡΔΗΣ (Pain 4.9, Bar 2.2)



$y(z,t)$: Εγκάρσια μετατόπιση των σωματιδίων των οποίων η θέση ισορροπίας είναι z

- Θεωρ. Δz της χορδής με κέντρο το z πυκνότητα $\rho = \rho(z)$ & ισορροπίας $T_0(z)$

- Για το τμήμα Δz εφαρμόζουμε το Ν του Νιούτωνα:

$$\rho(z)\,\Delta z\,\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = \Delta(T\sin\theta) = \Delta(T\cos\theta\tan\theta) = \Delta(T_0\tan\theta) = \Delta\left(T_0\frac{\partial y}{\partial z}\right)$$

$$\rho(z)\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\Delta}{\Delta z}\left(T_0\frac{\partial y}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(T_0\frac{\partial y}{\partial z}\right) \Rightarrow \rho(z) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(T_0(z)\frac{\partial y}{\partial z}\right)$$ κυμ. εξίσωση για ομογενή χορδή & μεταβλητής τά

Αν $\left.\begin{array}{l}\rho(z) = \rho_0 = \text{σταθερό} \\ T_0(z) = T_0 = \text{-}''\text{-}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Ίδια κλασ. κυμματική εξίσωση $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ Για ομογενή μέσα

<u>Παρατηρήσεις</u>

1) Δ.Ε. Β' τάξεως

2) Σε άλλα φυσικά συστήματα θα είναι η ίδια μόνο που θα αλλάζει η σταθ. $\frac{T_0}{\rho_0}$

<u>ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ</u>

Ορ: Οι ΚΤΤ ενός κλειστού συνεχούς μέσου ονομάζονται ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

Έστω ότι η χορδή ταλαντώνεται σε ένα ΚΤΤ' τότε $y(z,t) = A(z)\cos(\omega t + \phi)$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y(z,t) = -\omega^2 A(z)\cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{d^2 A(z)}{dz^2}\cos(\omega t + \phi)$$

Υποκαθιστώ στην κυμματική εξίσωση & $\frac{d^2 A(z)}{dz^2} + \omega^2\frac{\rho_0}{T_0}A(z) = 0$. Θέτω $k^2 = \frac{\omega^2\rho_0}{T_0}$, κυμ. αριθ.

$$\frac{d^2(A(z))}{dz^2} + k^2 A(z) = 0$$

Χαλαστική κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} \quad (1)$$

Σε κ.Τ.Τ. η λύση έχει τη μορφή: $y(z,t) = A(z)\cos(\omega t+\phi)$ (1)

& αντικαθιστώντας την (1) στην (1) έχω: $\frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2} + k^2 A(z) = 0$, όπου $k^2 = \frac{\omega^2 \rho_0}{T_0}$ (2)

Η εξ (2) ⇒ εξίσωση διαφορών για τα συγκεκριμένα σφαιρίδια

$A(z)$ ⇒ Στο σχήμα, το μορφή του ΚΤΤ.

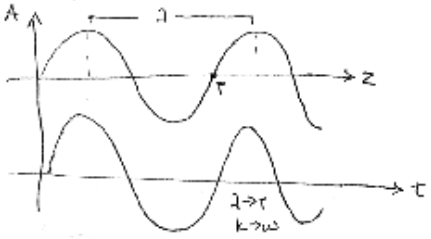
Η λύση της (2) είναι $A(z) = A\sin kz + B\cos kz$ (3) ή $A(z) = C\cos(kz+\theta)$

Η (3) αντιστοιχεί σε σταθερούσες στο χώρο.

Ράθη $\phi = kz+\theta \Rightarrow k = \frac{\Delta\phi}{\Delta z} = \frac{\text{μεταβολή φάσης}}{\text{μονάδα μήκους}}$ (L^{-1})

Μήκος κύματος: λ = μήκος που αντιστοιχεί σε $\Delta\phi = 2\pi$ ακτίνια

$k = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$



Τα λ. στο χώρο, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Τα λ. στο χρόνο, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

πχ. χορδή σταθερή στα 2 άκρα

ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ
$y(0,t) = y(l,t) = 0 \ \forall t$

1) $y(0,t) = \cos(\omega t+\phi)\,[A\sin 0° + B\cos 0°] = \cos(\omega t+\phi)B = 0 \Rightarrow B = 0$

2) $y(l,t) = \cos(\omega t+\phi)\,[A\sin(kl)] = 0 \ \forall t \Rightarrow \sin nkl = 0 \Rightarrow kl = n\pi$, $n = \{1,2,\dots\}$

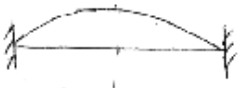
Άρα $k\pi = n\frac{\pi}{L} = n k_1$, $k_1 = \frac{\pi}{L}$

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\pi L}{n\pi} = \frac{2L}{n} = \frac{\lambda}{\pi} \quad (\lambda_1 = 2L)$$

Από τη σχέση $k^2 = \omega^2 = \frac{\rho_0}{\tau_0} \Rightarrow \omega = k\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}}\, k_n = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}}\, \frac{\pi}{L} n = \pi \omega_1$$

$$V_n = n V_1 \quad V_1 = \frac{1}{L2}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} \quad \left(\text{όπου } n = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}}\right), \quad V_n L n = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}} = \text{const.}$$

1ος ΚΤΤ  $\lambda_1 = 2L,\ V_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$

2ος ΚΤΤ  $\lambda_2 = \frac{2L}{2},\ V_2 = 2V_1$

3ος ΚΤΤ  $\lambda_3 = \frac{2L}{3},\ V_3 = 3V_1$

Παρατηρήσεις

1) Τα επιτρεπτά $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ εξαρτώνται μόνο από τις διαστάσεις του προβλήματος

2) Το $V_n = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}}$ εξαρτώνται και από τη δυναμική του προβλήματος, δηλ $\underset{\text{τάση χορδής}}{\tau_0} \cdot \underset{\text{πυκνότ.}}{\rho_0}$

ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Η σχέση μεταξύ του ω (που χαρακτηρίζει τη χρονική συχν. του κύματος) & του k (που χαρακτηρίζει τη χωρική συχν. του κύματος) ονομάζεται σχέση διασποράς.

δηλ. $\left.\begin{array}{l} \omega = \omega(k) \\ \text{ή } V = V(\lambda) \end{array}\right\}$

Παρατήρηση

Η σχέση $\omega=\omega(k)$ δεν εξαρτάται από τις οριακές συνθήκες. Εκφράζει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος (Βασική σχέση)

1x1.

ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΧΟΡΔΗ : $\omega=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}}\,k \Rightarrow \frac{\omega}{k}=\text{const}=c$ ή $\frac{\omega}{k}=\frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}}=\nu\lambda=c$

1x 2.

ΧΟΡΔΗ ΜΕ ΣΦΑΙΡΙΔΙΑ: $\omega=2\omega_0\sin\frac{ka}{2}$, $\omega_0=\sqrt{\frac{\tau_0}{ma}} \Rightarrow \frac{\omega}{k}=2\omega_0\frac{\sin\frac{ka}{2}}{k}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

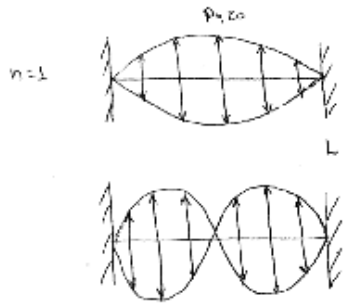
Τα κύματα που ικανοποιούν τη σχέση $\frac{\omega}{k}=\text{σταθ.}$, ονομάζονται ΜΗ ΔΙΑΣΚΟΡΠΙΖΟΜΕΝΑ ΚΥΜΑΤΑ. (πχ. ομογενής χορδή)

Τα κύματα που ικανοποιούν τη σχέση $\frac{\omega}{k}=f(k)$, ονομάζονται ΔΙΑΣΚΟΡΠΙΖΟΜΕΝΑ ΚΥΜΑΤΑ (πχ. χορδή με σφαιρίδια)

$\frac{\omega}{k}=U$ (ταχύτητα κύματος) = σταθ. όπου όλες οι συχνότητες ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα $\Rightarrow$ Δεν αλλάζει σχήμα το κύμα ή ο παλμός.

$\frac{\omega}{k}=U(k)$ (ταχύτητα κύματος) $\neq$ σταθ. όπου δεν ταξιδεύουν όλες οι συχνότητες με την ίδια ταχύτητα $\Rightarrow$ Αλλάζει σχήμα

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΧΟΡΔΗΣ (4.12, 4.13 Pain)



$\forall$ ΚΤΤ n της χορδής

$y_n=C_n(z)\cos(\omega_n t+\phi_n)$, όπου $C_n(z)=A_n\sin k_n z+B_n\cos k_n z$

$\omega_n^2=\frac{\tau_0}{\rho_0}k_n^2$, $n\frac{\pi}{L}=nk_1=k_n$ όπου $k_1=\frac{\pi}{L}$

Α) ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Ενός στοιχειώδους μήκους dz ίδια με την κινητική ενέργεια ενός ανηρτημένου αρμονικού ταλαντωτή μάζας $dm = \rho_0 dz$

$$dT_n = \frac{1}{2}(\rho_0 dz)\dot{g}_n^2 = \frac{1}{2}\rho_0 dz\,\omega_n^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi_n)\, C_n^2(z)$$

$$T_n = \frac{1}{2}\rho_0\,\omega_n^2 \sin(\omega_0 t + \phi_n)\int_0^L C_n^2\,dz$$

όπου $\int_0^L C_n^2\,dz = \int_0^L (A_n \sin k_n z + B_n \cos k_n z)^2 dz = A_n^2\int_0^L \sin^2(k_n z)\,dz + B_n^2\int_0^L \cos^2(k_n z)\,dz$

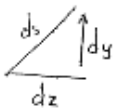
$$+ 2A_nB_n\underbrace{\int_0^L \sin(k_n z)\cos(k_n z)\,dz}_{\to 0} = \frac{L}{2}(A_n^2 + B_n^2)$$

ΤΕΛΙΚΑ : $T_n = \frac{1}{4}\rho_0 L\omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2)\sin^2(\omega_n t + \phi_n)$

$U_n = \frac{1}{4}\rho_0 L\omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2)\cos^2(\omega_n t + \phi_n)$

Β) ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Είναι ίση με το έργο που παράγει η T εκτείνοντας ένα στοιχειώδες dz σε νέο μήκος ds



$$\# \quad ds^2 = dz^2 + dy^2 \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dz \simeq \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right)dz$$

$$V_n = \int_0^L \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 dz = \frac{1}{2}T_0 k_n^2\cos^2(\omega_n t + \phi_n)\left[\int_0^L (A_n\cos k_n z - B_n \sin k_n z)^2 dz\right]$$

ΤΕΛΙΚΑ $E = T_n + V_n = \frac{1}{2}M\omega_n^2(A_n^2 + B_n^2)$, όπου $M = \rho_0 L$

ΓΕΝΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΧΟΡΔΗΣ - ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER (Bar.2.3 - Rain 2.3)

Η γενική κίνηση ⇒ υπέρθεση όλων των κτ

$$y(z,t) = \sum_n y_n = \sum_n [\cos(\omega_n t + \phi_n)] \, [A_n' \sin k_n z + B_n' \cos k_n z] \quad (I)$$

k_n: βρίσκονται από τις συνοριακές συνθήκες

ω_n: -"- -"- σε σχέση διασποράς $\omega_n = \omega(k_n)$

A_n', B_n', ϕ_n : βρίσκονται από αρχικές & οριακές συνθήκες.

$y(z,t) = ?$

Ⓐ Αρχικές συνθήκες για $t=0$: $y(t,0) = y_1(z)$ (1)

$\dot{y}(t,0) = y_2(z)$ (2)

Ⓑ Οριακές συνθήκες: $y(0,t) = y(L,t) = 0 \quad \forall t$ (3)

$y(0,t) = \dot{y}(L,t) = 0 \quad \forall t$ (4)

Από τη (3a) ⇒ $y(0,t) = \sum_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \left[A_n' \cdot 0 + B_n' \cdot 1\right] = 0 \; \forall t \Rightarrow B_n' = 0 \; \forall n$

-"- (3b) ⇒ $y(L,t) = \sum_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \, A_n' \sin k_n t = 0 \; \forall t \Rightarrow$

$\sin k_n t = 0 \Rightarrow k_n t = n\pi \Rightarrow k_n = n\frac{\pi}{L} = n k_1 \quad (k_1 = \pi/L, \; \lambda_0 = 2L)$

$\omega_n = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}, \quad k_1 = n\omega_1, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$

I) $\Rightarrow$ $y(z,t) = \sum_n A_n' \sin k_L z \cos(n\omega_L t + \phi_n)$

$$\dot{y}(z,t) = -\sum_n A_n' \omega_n \sin(n k_L z) \sin(n\omega_L t + \phi_n)$$

α $t=0$ $\quad y(z,0) = \sum_n A_n' \cos\phi_n \sin(n k_L z)$

$$\dot{y}(z,0) = \sum_n \omega_n A_n' \sin\phi_n \sin(n k_L z)$$

Θέτω $A_n' \cos\phi_n = A_n$

$A_n' \sin\phi_n = C_n$

$\tan\phi_n = C_n / A_n$ & $A_n' = \sqrt{A_n^2 + C_n^2}$

Τελικά για $t=0$
$$\begin{cases} y_0(z) = y(z,0) = \sum A_n \sin(n k_L z) \\ v_0(z) = \dot{y}(z,0) = -\sum \omega_n C_n \sin(n k_L z) \end{cases} \quad (\text{II})$$

Αν μας δοθούν οι $y_0(z)$, $v_0(z)$ μπορώ να υπολογίσω τα A_n, C_n?

ΝΑΙ, φαίνεται λίγο δύσκολο αλλά είναι απλό.

Υπολογισμός του A_n: πολ/ζω την (II) με $\sin m k_L z$ & ολοκληρώνω από $z=0$ μέχρι $z=L$

$$\int_0^L y_0(z) \sin(m k_L z)\, dz = \sum_{n=1} A_n \int_0^L \sin(m k_L z) \cdot \sin(n k_L z)\, dz = \sum_{n=1} A_n \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_L}{2}\right)\delta_{nm} = A_n \frac{\lambda_L}{2} = A_n \frac{2L}{n} = A_n!$$

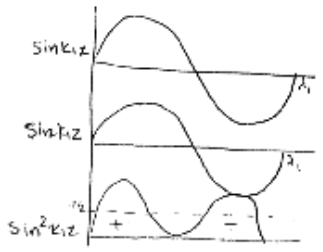
$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{L}\int_0^L y_0(z) \sin n k_L z\, dz$$

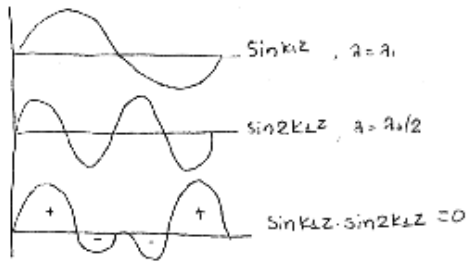
<u>ΣΧΕΣΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΟΣ</u>

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_L} \begin{matrix} \sin n k_L z \sin m k_L z\, dz \\ \text{ή} \\ \cos n k_L z \cos m k_L z\, dz \end{matrix} = \lambda_L/2\, \delta_{nm}, \quad \text{όπου } \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_L} \sin k_L z\, n \cos m k_L z\, dz = 0 \quad \forall\, n,m \qquad \text{όπου } k_L = \frac{2\pi}{\lambda_L}$$

& z_1 μια τυχαία τιμή του z.





Επίσης $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L y_0(z)\sin(nk_1 z)\,dz$ (III)

$$C_n = -\frac{2}{\omega_n L}\int_0^L U_0(z)\sin(nk_1 z)\,dz$$

Αν $U_0(z)=0 \Rightarrow C_n = 0\ \forall n$ & $A_n' = A_n$

ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER (Pain 9.1, Ber 2.3)

ΘΕΩΡΗΜΑ: ΟΛΕΣ ΟΙ "ΛΟΓΙΚΕΣ" (συνήκες του Dirichlet) περιοδικές συναρτήσεις

$F(z) = F(z+\lambda_1)\ \forall z$, με περίοδο λ_1, μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρά Fourier με τη μορφή

$$F(z) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \sin nk_1 z + B_n \cos nk_1 z\right) \quad k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$$

δηλαδή σε άθροισμα αρμονικών περιοδικών συναρτήσεων $\begin{pmatrix}\sin nk_1 z\\ \cos nk_1 z\end{pmatrix}$ με περίοδο $\lambda_n = \frac{\lambda_1}{n}$

δηλ. ακέραια υποπολλαπλάσια της περιόδου της αρχικής συνάρτησης) αφού

$$\sin\left(nk_1(z+\lambda_1/n)\right) = \sin\left(nk_1 z + n^2\frac{\pi}{\lambda_1}\frac{\lambda_1}{n}\right) = \sin nk_1 z \quad \text{όπου}$$

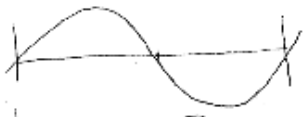
$$B_0 = \frac{1}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)\,dz$$

$$A_n = \frac{2}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)\sin(nk_1 z)\,dz, \quad n=1,2,\ldots$$

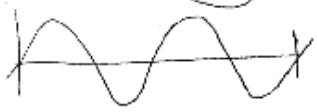
$$\vdots$$

$$B_n = \frac{2}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)\cos nk_1 z\,dz$$

$\sin k_1 z$



$\sin 2k_1 z$



$\vdots$

$\sin n k_1 z$

Απόδειξη

$$\therefore \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} f(z)\,dz = \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} B_0\,dz + \sum_n A_n \cancel{\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \sin n k_1 z\,dz}^{\,0} + \sum B_n \cancel{\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \cos n k_1 z\,dz}^{\,0} \Rightarrow$$

$$B_0 = \frac{1}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} f(z)\,dz \quad \text{(μέση τιμή στο διάστημα } [z_1, z_1+\lambda_1]\text{)}$$

2. Πολ/γω & τα 2 μέλη με $\sin m k_1 z$ & ολοκληρώνω σε μια περίοδο

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} f(z)\sin m k_1 z\,dz = B_0 \cancel{\int \sin m k_1 z\,dz}^{\,0} + \sum A_n \int \sin n k_1 z \sin m k_1 z\,dz + \sum B_n \cancel{\int \cos n k_1 z \sin m k_1 z}^{\,0}$$

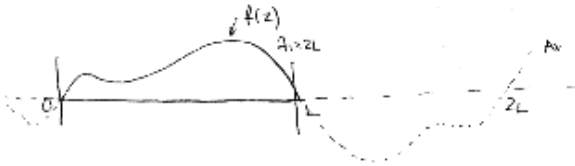
$$= \frac{\lambda_1}{2}\sum A_n \delta_{nm} = \frac{\lambda_1}{2}\left(A_1 \cancel{\delta_{1m}}^{\,0} + A_2 \cancel{\delta_{2m}}^{\,0} + \dots + A_m \delta_{mm} + A_{m+1} \cancel{\delta_{m+1,m}}^{\,0} + \dots\right) = \frac{\lambda_1}{2} A_m$$

$$A_m = \frac{2}{\lambda_1}\int f(z)\sin m k_1 z\,dz, \quad m \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

Αποδεικνύεται ότι Αν $f(-z) = f(z) \Rightarrow A_n = 0,\ B_n \neq 0$, μόνο συνημίτονα (άρτια)

$f(-z) = -f(z) \Rightarrow B_n = 0,\ A_n \neq 0$, μόνο ημίτονα (περιττές)

$B_0 = 0$



$$F(z) = \begin{cases} f(z), & 0 < z < L \\ -f(-z), & -L < z < 0 \end{cases}$$

$F(z+\lambda_1) = F(z)$, $\lambda_1 = 2L$. Περιττή συνάρτηση, οπότε το ανάπτυγμα Fourier έχει μόνο ημίτονα

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n k_1 z, \quad k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$$

$$A_n = \frac{2}{\lambda_1}\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)\sin n k_1 z\,dz$$

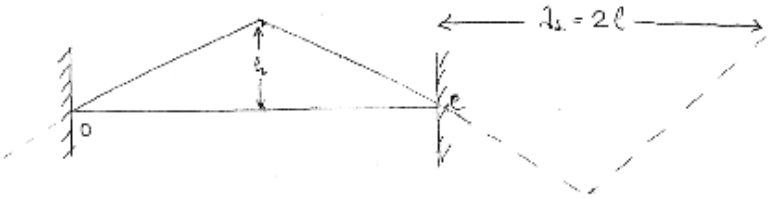
Γα-ίδια ισχύουν & για περιοδικές συναρτήσεις χρόνου

$$F(t+T_1) = F(t) \ \forall\, t, \quad k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

Ανάπτυξη κατά Fourier:

$$F(t) = B_0 + \sum_{n=1} \left(A_n \sin(n\omega_1 t) + B_n \cos(n\omega_1 t) \right) \text{ όπου } B_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T} F(t)\, dt,$$

$$A_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T} F(t) \sin(n\omega_1 t), \quad B_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T} F(t) \cos(n\omega_1 t)$$



$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{2hz}{e}, & 0 \le z \le \dfrac{e}{2} \\ \dfrac{2h(e-z)}{e}, & \dfrac{e}{2} \le z \le e \end{cases}$$

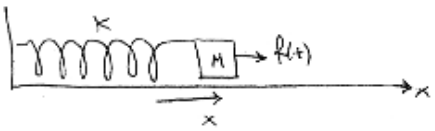
$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n k_1 z), \quad k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}, \quad \lambda_1 = 2\ell$$

$$A_n = \frac{2}{\lambda_1} \int_0^e F(z) \sin(n k_1 z)\, dz = 2 \frac{2}{\lambda_1} \int_0^{\ell} F(z) \sin(n k_1 z) = \frac{8h}{\pi^2 n^2} \left(\sin n k_1 z \right)$$

$$F(z) = \frac{8h}{\pi^2} \left[\sin \pi \frac{z}{\ell} - \frac{1}{3^2} \sin 3\left(\pi \frac{z}{\ell}\right) + \frac{1}{5^2} \sin 5\left(\frac{\pi z}{\ell}\right) + \cdots \right]$$

$$y(z,t) = \frac{8h}{\pi^2} \left[\sin\left(\frac{\pi z}{\ell}\right) \cos\omega_1 t + \frac{1}{3^2} \sin 3\left(\frac{\pi z}{\ell}\right) \cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5^2} \sin\left(\frac{\pi z}{\ell}\right) \cos(5\omega_1 t) \cdots \right]$$

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ (παρ. 3,2 Βελ) (Βλ. κφ 7 είχος 1 Βελ)



1) ΔΥΝΑΜΗ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ : $-Kx(t) = -M\omega_0^2 x$, $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ (ω_0 = ιδιοσυχνότητα ελεύθ. ταλαντώσεων χωρίς τριβή)

2) ΔΥΝΑΜΗ ΤΡΙΒΗΣ : $-M\Gamma\dot{x}(t)$, Γ: σταθερά απόσβεσης/μονάδα μάζας $[\Gamma] = T^{-1}$ (s^{-1})

) $f(t) = \sum_\omega f(\omega)\cos[\omega t + \phi(\omega)]$ ανάπτυγμα fourier & $x(t) = \sum_\omega x_\omega(t)$ & επιμένουμε δε χάνουμε τη γενικότητα αν θεωρήσουμε ότι $f(t) = f_0\cos\omega t$

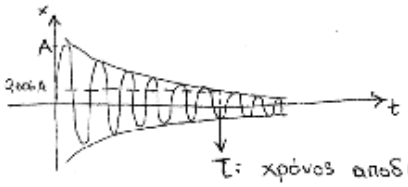
) Εξίσωση κίνησης : $M\ddot{x} = -M\omega_0^2 x - M\Gamma\dot{x} + f_0\cos\omega t \Rightarrow$

$$\boxed{\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{M}\cos\omega t} \quad (I)$$

5) Η λύση της (I) : $x(t) = x_L(t) + x_S(t)$, όπου $x_L \rightarrow$ λύση ομογενούς
$x_S \rightarrow$ μερική λύση της I / λύση στις ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΙΑ

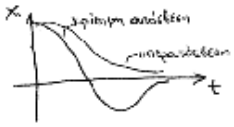
5) Λύση της ομογενούς α. Για $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$ ασθενής απόσβεση

$$x_L = Ae^{-\frac{1}{2}\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_L t + \vartheta), \quad \tau = \frac{1}{\Gamma}, \quad \omega_L^2 = \omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}$$ (ή μικρό ... ω



τ: χρόνος αποδιέγερσης ⇒ Σε πλάτος $Ae^{-95} = 0{,}606A$

3. Για $\frac{\Gamma}{2} = \omega_0$, κρίσιμη απόσβεση : $x_L = e^{-\Gamma/2}(A + Bt)$



. Για $\frac{\Gamma}{2} > \omega_0$, υπερκρίσιμη απόσβεση $x_L = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}(c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt})$, $p = \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} - \omega_0^2}$

2). ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ $\rightarrow t \gg \tau$, $x_1 \rightarrow 0$ & το σύστημα ταλαντώνεται με την εξωτερική συχνότητα ω.

$x_s = x = A\cos(\omega t + \phi) = A_{ab}(\omega)\sin\omega t + A_{el}(\omega)\cos\omega t$ Αντικαθιστώ στην (1.) & έχω

$\rightarrow A_{ab} = \frac{F_0}{M}\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}$ πλάτος απορρόφησης, $\Delta\phi = 90^\circ$ ως προς την εξωτερική δύναμη,

$\bar{P} \neq 0$

$\rightarrow A_{el} = \frac{F_0}{M}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}$, πλάτος ελαστικό, $\Delta\phi = 0^\circ$ ως προς την εξωτερική δύναμη,

$\bar{P} = 0$

Επίσης $x = A\cos(\omega t+\phi) = A\cos\omega t\cos\phi - A\sin\omega t\sin\phi \Rightarrow \begin{cases} A_{el} = A\cos\phi \\ A_{ab} = A\sin\phi \end{cases} \Rightarrow A = \sqrt{A_{ab}^2 + A_{el}^2}$

& $\tan\phi = -\frac{A_{ab}}{A_{el}}$, $\tan\phi = -\frac{\Gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$ & $A = \frac{F_0}{M}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}}$

<u>Προσοχή</u>: Τα πλάτη A, A_{ab}, A_{el} & η ϕ δεν εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες αλλά μόνο από το F_0, ω & Γ.

3) Για να διατηρείται η ταλάντωση πρέπει η διεγείρουσα δύναμη να προσφέρει ενέργεια ίση α αναπληρώνεται η ενέργεια που χάνεται λόγω τριβών. $\bar{P} = \bar{P}_{\Gamma\omega}$.

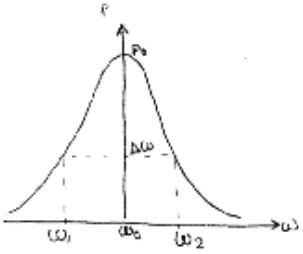
$P = F\upsilon = F_0\cos(\omega t)(-\omega A_{ab}\cos\omega t - \omega A_{el}\sin\omega t)$

$P = F_0\omega A_{ab}\underbrace{\overline{\cos^2\omega t}}_{1/2} - F_0\omega A_{el}\underbrace{\overline{\cos\omega t\sin\omega t}}_{0} = \frac{1}{2}F_0\omega A_{ab}$.

3) $\bar{P} = P(\omega) = \frac{1}{2}F_0^2\frac{\omega^2\Gamma}{2M}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}$

$\bar{P} = P(\omega_0) = P_0 = \frac{1}{2}\frac{F_0^2\omega_0^2\Gamma}{M\omega_0^2\Gamma^2} = \frac{1}{2}\frac{F_0^2}{M\Gamma}$

$\Rightarrow P(\omega) = P_0\frac{\Gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial\omega} = 0 \Rightarrow P_{max} \rightarrow \omega = \omega_0$



10) "ΣΗΜΕΙΑ ΗΜΙΙΣΧΥΟΣ" $\rightarrow$ ω: $P(\omega) = \frac{P_0}{2} \rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 \pm \Gamma\omega \xrightarrow{\text{ρίζες}} \omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \pm \Gamma/2$

& $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \Gamma$ $(\tau = 1/\Gamma) \Rightarrow (\Delta\omega)_{\omega\upsilon} \cdot \tau_{\varepsilon\lambda} = 1$ ή $\Gamma\tau = 1$

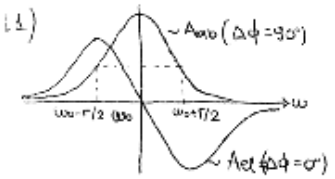
Δω: πλήρες εύρος συντονισμού για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

τ: χρόνος αποδιέγερσης για ελεύθερες ταλαντώσεις

- Η προηγούμενη σχέση έχει σοβαρές πειραματικές επιπτώσεις.

· Πειραματικά πιο εύκολο να μετρήσω το Δω παρά το τ και ελεύθερων ταλαντώσεων & μέσω του $\Delta\omega \rightarrow \tau \rightarrow \Gamma$ (σοβαρή παράμετρος που σχετίζεται με τη "ΦΥΣΙΚΗ" του συστήματος)

11)



Ο όρος $A_{\varepsilon\lambda}\cos\omega t$ δεν συνεισφέρει στο $\bar{P}$ & $A_{\varepsilon\lambda}(\omega_0)$

- μήκος $A_{\varepsilon\lambda}$ άχρηστο! $\alpha \times 1$

$$\frac{A_{\varepsilon\lambda}}{A_{\alpha\nu}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\Gamma\omega} = \omega_0 \frac{[1 - (\omega/\omega_0)^2]}{\Gamma(\omega/\omega_0)}$$

α) $\omega \ll \omega_0$ $\left(\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1\right) \Rightarrow \frac{A_{\varepsilon\lambda}}{A_{\alpha\nu}} = \frac{\omega_0}{\Gamma} \frac{1}{(\omega/\omega_0)} \gg 1 \Rightarrow A_{\varepsilon\lambda} \gg A_{\alpha\nu}$

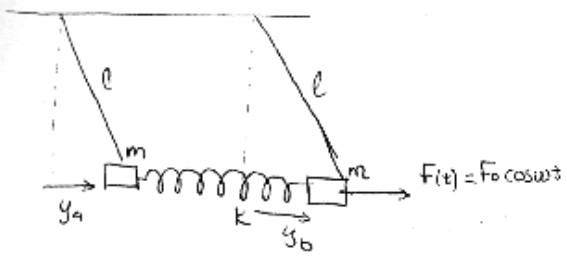
β) $\omega \gg \omega_0$ $\left(\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1\right) \Rightarrow \frac{A_{\varepsilon\lambda}}{A_{\alpha\nu}} = -\frac{\omega_0}{\Gamma}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \gg 1 \Rightarrow |A_{\varepsilon\lambda}| \gg A_{\alpha\nu}$ $(A_{\alpha\nu} > 0)$ $\Big\}$ $\frac{|A_{\varepsilon\lambda}|}{A_{\alpha\nu}} \gg 1 \rightarrow$

$\Gamma\omega \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$, $A_{\alpha\nu} \rightarrow 0$

$$x(t) \approx A_{\varepsilon\lambda}\cos\omega t = \frac{F_0}{M} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}\cos\omega t = \frac{F_0}{M} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}\cos\omega t = \frac{F_0}{M} \frac{\cos\omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$ & είναι

ισοδύναμο με το να θέσουμε $\Gamma = 0$ στην αρχική δ.ε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΑ ΕΚΚΡΕΜΗ



1) Εξ. κίνησης

$$m\ddot{y}_a = -\frac{mg}{l} y_a = -k(y_a - y_b) - M\Gamma \dot{y}_a + F_0 \cos\omega t \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_b = -\frac{mg}{l} y_b = -k(y_a - y_b) - M\Gamma \dot{y}_b \quad (2)$$

2) Για ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς τριβή γνωρίζουμε ότι:

1ος ΚΤΤ : $y_a = y_b$, $\omega_1^2 = g/l$ & $y_1 = \frac{1}{2}(y_a + y_b)$ (3)

2ος ΚΤΤ : $y_a = -y_b$, $\omega_2^2 = g/l + \frac{2k}{m}$ & $y_2 = \frac{1}{2}(y_a - y_b)$ (4)

3) Μετασχηματίζουμε τις εξισώσεις κίνησης στις κανονικές συντεταγμένες προσθέτοντας τις (1) & (2) & αφαιρώντας την (2) από την (1)

$(1)+(2) \rightarrow M\ddot{y}_1 + M\omega_1^2 y_1 + M\Gamma\dot{y}_1 = \frac{1}{2} F_0 \cos\omega t$ (5)

$(2)-(1) \rightarrow M\ddot{y}_2 + M\omega_2^2 y_2 + M\Gamma\dot{y}_2 = \frac{1}{2} F_0 \cos\omega t$ (6)

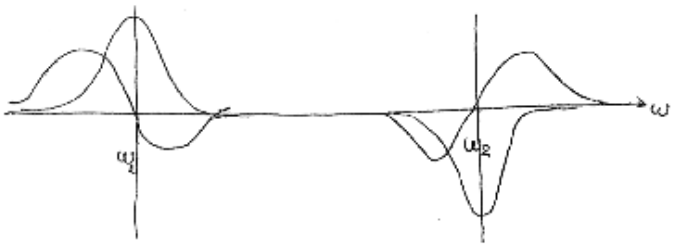
4) Οι (5) & (6) οδήγησαν & κάθε ΚΤΤ συμπεριφέρεται ως ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ με ιδιοσυχνότητα ω_i → ιδιοσυχνότητα ελεύθερης ταλάντωσης

5) $y_a = y_1 + y_2 = \left(A_{ab}^{(1)} + A_{ab}^{(2)}\right)\sin\omega t + \left(A_{el}^{(1)} + A_{el}^{(2)}\right)\cos\omega t$

$y_b = y_1 - y_2 = \left(A_{ab}^{(1)} - A_{ab}^{(2)}\right)\sin\omega t + \left(A_{el}^{(1)} - A_{el}^{(2)}\right)\cos\omega t$

φάσε a

Σύμφασε b



P

$\omega = \omega_1$ παρατηρούμε ότι $A_{ab}^{(a)} = A_{ab}^{(b)}$ & $A_{el}^{(a)} = A_{el}^{(b)} \Rightarrow y_a = y_b$

$\omega = \omega_2$ παρατηρούμε ότι $A_{ab}^{(a)} = -A_{ab}^{(b)}$ & $A_{el}^{(a)} = -A_{el}^{(b)} \Rightarrow y_a = -y_b$

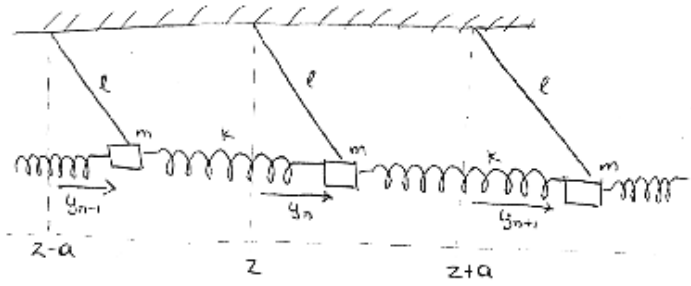
.) Το σύστημα παρουσιάζει 2 συχνότητες για ω_1 & ω_2 & μακριά από αυτές συχνότητες

που $A_{ab}^{(1)}$ & $A_{ab}^{(2)} \simeq 0$

Το σύστημα περιγράφεται από τους ελαστικούς όρους $y_a = \left(A_{el}^{(1)} + A_{el}^{(2)}\right)\cos\omega t$

$y_b = \left(A_{el}^{(1)} - A_{el}^{(2)}\right)\cos\omega t$.

Θε μελετήσουμε Ν συζευγμένα εκκρεμή, σε κατάσταση μόνιμης κατάστασης υπό την επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης συχνότητας ω



Παρατηρήσεις: Για ω μακριά από τα ωi (ιδιοσυχνότητες συστήματος) $A_{\omega i} << A_{el}$ & $y \simeq A_{el}^{(1)} \cos\omega t + A_{el}^{(2)} \cos\omega t + \dots + \dots = A_{el} \cos\omega t \Rightarrow$ θέτω $\Gamma = 0$ στα εξισώσεις αλλά θεωρώ ότι υπάρχει ένα μικρό ποσοστό εξασθένισης ώστε το σύστημα να φτάσει σε μόνιμη κατάσταση

Εξίσωση κίνησης

$$m\ddot{y}_n = -m\omega_0^2 y_n + k(y_{n+1} - y_n) - k(y_n - y_{n-1}), \text{ όπου } \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Στην προσέγγιση του συνεχούς ($y_n(t)$, μεταβάλλεται πολύ αργά όσο αυξάνει το n)

$$y_n(t) \to y(z,t)$$

$$y_{n+1}(t) \to y(z+a,t) = y(z,t) + a\frac{\partial y(z,t)}{\partial z} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} + \dots$$

$$y_{n-1}(t) \to y(z-a,t) = y(z,t) - a\frac{\partial y(z,t)}{\partial z} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} + \dots$$

Αντικαθιστώ στην (1) & :

$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2\, y(z,t) + \frac{ka^2}{m}\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} \quad (2)$$

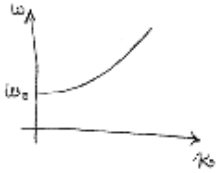
Ονομάζεται η εξίσωση των Klein-Gordon & ισχύει επίσης για ελεύθερα σχετικιστικά σωματίδια (πχ e^-

Σε μόνιμη κατάσταση το $y(z,t) = A(z)\cos(\omega t)$ (3)

Αντικαθιστώ στην (2) $\rightarrow \left[\frac{d^2A(z)}{dz^2} + \frac{M}{ka^2}(\omega^2-\omega_0^2)A(z)\right]\cos\omega t = 0 \quad \forall t$

Άρα $\frac{d^2A(z)}{dz^2} + k^2 A(z) = 0$, όπου $k^2 = \frac{M}{ka^2}(\omega^2-\omega_0^2)$ (5)

α) $\omega > \omega_0$, $k^2 > 0$, χαρακτηριστική εξίσωση $p^2 + k^2 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \pm ik$



$A(z) = c_1 e^{-ikz} + c_2 e^{ikz} \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &A(z) = A\sin kz + B\cos kz \\ &y(z,t) = A(z)\cos\omega t \qquad \& \ \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{ka^2}{M}k^2 \rightarrow \text{σχέση διασποράς} \end{aligned}}$$

Ονομάζονται ημιτονικά κύματα, & A,B από οριακές συνθήκες

β) $\omega < \omega_0$, $k^2 < 0 \rightarrow k = \pm ik$, $k^2 = -\kappa^2$ & η (4) γράφεται:

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} - \kappa^2 A(z) = 0, \text{ όπου } \kappa^2 = \frac{M}{ka^2}(\omega_0^2-\omega^2)$$

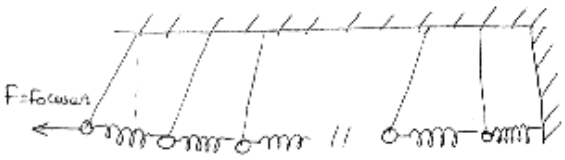
σταθερά

χαρακτηριστική εξίσωση $\Rightarrow p = \pm\kappa \Leftarrow p^2 - \kappa^2 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &A(z) = Ae^{-\kappa z} + Be^{\kappa z}, \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{ka^2}{M}\kappa^2 \\ &y(z,t) = A(z)\cos\omega t \end{aligned}}$$

Ονομάζονται εκθετικά ή άφαρα κύματα. Επιπλέον για $\omega < \omega_0$ αποκόπτονται τα ημιτονικά κύματα, & το ω_0 ονομάζεται συχνότητα αποκοπής

Παράδειγμα



$\omega < \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $A(z) = A_0 e^{-kz}$, $y(z,t) = A(z)\cos\omega t$

$\delta = \frac{1}{k}$ μήκος εξασθένισης → $A = A_0 e^{-1}$

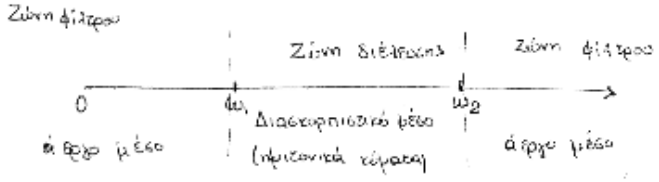
k = σταθερά εξασθένισης

ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΦΙΛΤΡΩΝ

Στη γενική περίπτωση κάθε σύστημα χαρακτηρίζεται από 2 συχνότητες αποκοπής

α) Τη χαμηλότερη → χαμηλότερο ΚΤΣ για ελεύθερες ταλαντώσεις

β) Την υψηλή ω_2 → υψηλότερο ΚΤΣ για ελεύθερες ταλαντώσεις

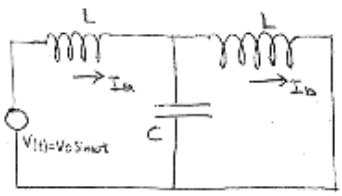


A) $\omega_1 < \omega < \omega_2$: Ζώνη διέλευσης του φίλτρου, το πλάτος $A_{εξ}$ συγκρίσιμο $A_{εισ}$,

δηλ. $y(z,t) = (A\sin kz + B\cos kz)\cos\omega t$

B) $\omega < \omega_1$ ή $\omega > \omega_2$: φίλτρο διέλευσης ζώνης, το πλάτος $A_{εξ} << A_{εισ}$,

δηλ. $y(z,t) = A e^{-kz}\cos\omega t$



1) Α.Ε. $L\ddot{I}_a + \frac{1}{C}(I_a - I_b) = \omega V_0 \cos\omega t$ (1)

$L\ddot{I}_b - \frac{1}{C}(I_a - I_b) = 0$ (2)

2. Οι κανονικές συντ/νες $I_1 = I_a + I_b$ & $I_2 = I_a - I_b$ (3)

$(1)+(2) \Rightarrow \ddot{I}_1 = \frac{\omega V_0}{L}\cos\omega t \Rightarrow \omega_1^2 = 0$ (4)

$(1)-(2) \Rightarrow \ddot{I}_2 + \frac{2}{L}\frac{I_2}{C} = \frac{\omega V_0}{L}\cos\omega t \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{2}{LC}$

Ιδιοσυχνότητες για ελεύθερες ταλαντώσεις δηλ. $V(t)=0$

$I_1 = A\cos\omega t$ (λύση της (1))

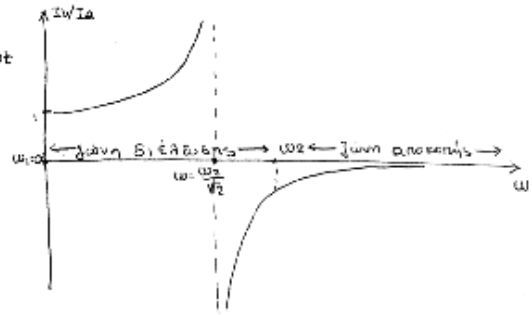
$-\omega^2 A_1 \cos\omega t = \frac{\omega V_0}{L}\cos\omega t \Rightarrow A_1 = -\frac{V_0}{\omega L}$

$I_2 = A_2\cos\omega t \rightsquigarrow -\omega^2 A_2\cos\omega t + \omega_2^2 A_2\cos\omega t = \frac{\omega V_0}{L}\cos\omega t \Rightarrow A_2 = \frac{\omega V_0}{L(\omega_2^2-\omega^2)}$

$I_a = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) = -\frac{V_0}{2\omega L}\left(\frac{\omega_2^2 - 2\omega^2}{\omega_2^2-\omega^2}\right)\cos\omega t$

$I_b = \frac{1}{2}(I_1 - I_2) = -\frac{V_0}{2\omega L}\left(\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2-\omega^2}\right)\cos\omega t$

$\frac{I_b}{I_a} = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - 2\omega^2} = \frac{\nu_2^2}{\nu_2^2 - 2\nu_2}$ $(\omega = 2\pi\nu)$



ΟΔΕΥΟΝΤΑ ΚΥΜΑΤΑ (Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις ανοικτών συστημάτων) (Κφ 4 Berkeley)

Εισαγωγή

1) α. Ανοικτά συστήματα (Δεν έχουν όρια ή ∄ ανακλάσεις)

β. Κλειστά συστήματα (Έχουν όρια ή ∃ ανακλάσεις)

Πχ. i) Ταλαντωτής που διεγείρει την ανοικτή θάλασσα

ii) Ταλαντωτής που διεγείρει λεκάνη με νερό

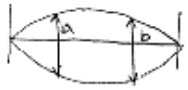
(Αν η λεκάνη είναι τελείως απορροφητική (όχι ανακλάσεις) το μέσο συμπεριφέρεται σαν ανοικτό. Άρα το μέσο δεν εκτείνεται αναγκαία ως το ∞ για να είναι ανοικτό)

2) Τα οδεύοντα κύματα μεταφέρουν ενέργεια, ορμή και γτλ

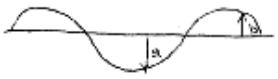
) Αν η διεγ. δύναμη αρμονική ($F_0 \cos\omega t$) ⇒ Αρμονικά οδεύοντα κύματα.

) ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ

Στάσιμα κύματα ⇒ (κλειστά κύματα) όλα τα κινούμ. μέρη του ταλαντωτή με την ίδια φάση

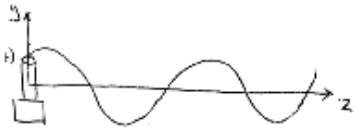


) οδεύοντα κύματα ⇒ (ανοικτά κύματα) όχι σε φάση:



Το b ακολουθεί την ίδια κίνηση με το σημείο a αλλά με μια χρονική καθυστέρηση Δt που χρειάζεται το κύμα να πάει από το a στο b, δηλ:

$b(t) = y_a(t')$ όπου $\Delta t = t - t' = \frac{b-a}{v}$, όπου v. ταχ. κυμ.



Κυμάτος : - Ομοιόμορφη τεντωμένη χορδή από ο έως ∞

- Η μετατόπιση του ακροδέκτη, $z=0$, $D(t) = A\cos\omega t$. Θ έλουμε να βρούμε (z,t). Για $z=0$ η χορδή αφού είναι δεμένη με τον ακροδέκτη θα έχει μετατόπιση $z=0$

$y(0,t) = D(t) = A\cos t$

<u>Ταχύτητα φάσης U_ϕ</u> ⇒ Ταχύτητα υ που κινείται ένα αρμονικό οδεύον κύμα

Αναλαμβ. ότι η κίνηση σε οποιαδήποτε θέση τη χρον. στιγμή t είναι ίδια με την κίνηση που εκτελούσε το κινούμενο σημείο στη θέση z=0 προηγούμενη στιγμή t'

$(z,t) = y(0,t')$

Η διαφορά χρόνου t-t' πρέπει να ισούται με τη χρον. διάρκεια που χρειάζεται το κύμα να διανύσει την απόσταση z με ταχ. U_ϕ.

$t - t' = \frac{z}{U_\phi}$ ή $t = t' - \frac{z}{U_\phi}$

$(z,t) = A\cos\omega t' = A\cos\omega\left(t - \frac{z}{U_\phi}\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega z}{U_\phi}\right) = A\cos(\omega t - kz)$, $k = \frac{\omega}{U_\phi}$

Για z=σταθ. ⇒ Αρμονική παλάντωση με περίοδο $T = 2\pi/\omega$

Για t=σταθ ⇒ — // — $\lambda = 2\pi/k$ $\Big\}$ ⇒ $U_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \lambda\nu$

$y(z,t) = A\cos\phi(t)$ όπου $\phi(t) = \omega t - kz$ ⇒ Αν θέλουμε να παρακολουθήσουμε μια ορισμένη κορυφή του κύματος (π.χ. το μέγιστο) πρέπει να κοιτάξουμε σε διαφορετικά ύψεια z καθώς ο χρόνος μεγαλώνει ώστε να έχουμε σταθερή φάση.

$y(z,t) = \text{σταθ.} \Rightarrow \phi(z,t) = \text{σταθ} \Rightarrow dk(z,t) = \frac{\partial\phi}{\partial z}dz + \frac{\partial\phi}{\partial t}dt = -k\,dz + \omega\,dt = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = U_\phi$

Τελικά οι μεταβολές μεταπτώσεων και παλαντώσεων σε η διάδοση φάσεων είναι αυτό που βλέπουμε σαν κυματική κίνηση

Ταχύτητες στην κυματική κίνηση

1) $U_\phi \rightarrow$ σχέση φάσεων

2) $U_\sigma \rightarrow$ σωματιδιακή ταχύτητα: # ταχυτητα του σωμ. γύρω από Θ.Ι.

$$U_\sigma = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kz)$$

3) Κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά $\rightarrow y = A\cos(\omega t - kz) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = U_\phi$.

προς τα αριστερά $\rightarrow y = A\cos(\omega t - kz) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{k} = -U_\phi$.

4) Ποια είναι η Δ.Ε. που περιγράφει το οδεύον κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση

α. $y = A\cos(\omega t - kz)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial z} &= -A\sin(\omega t - kz)(-k) = Ak\sin(\omega t - kz) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -A\sin(\omega t - kz)(-k)\omega = -A\omega\sin(\omega t - kz) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{1}{U_\phi}\frac{\partial y}{\partial t}$$

β. $y = A\cos(\omega t + kz)$ που διαδίδεται προς τα αριστερά

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial z} &= -A\sin(\omega t + kz) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -A\sin(\omega t + kz)\omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{U_\phi}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Αν πάρουμε τις 2ες παραγώγους φτάνουμε σε μια Δ.Ε. 2ης τάξης η οποία ισχύει για κύματα που διαδίδονται σε οποιαδήποτε διευθ. $(z, -z)$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{1}{U_\phi^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad U_\phi = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$$

ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΚΛΑΣΣΙΚΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ (Pain 4.5)

$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

c: Η ταχύτητα του κύματος (φασική ταχύτητα)

$c = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}}$ για ελαστική χορδή (Το τάση ισορροπίας της χορδής, $\rho_0 = m/\ell$ γραμμική πυκνότητα)

$$(1) \rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = 0 \quad (2)$$

Κάνω τους μετασχηματισμούς

$$\left.\begin{aligned} \xi &= z - ct \\ \eta &= z + ct \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} z &= \tfrac{1}{2}(\eta + \xi) \\ t &= \tfrac{1}{2c}(\eta - \xi) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial y}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial y}{\partial t}\right) \end{aligned}\right\} \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0} \quad (4)$$

Η γενική λύση της (4) $\boxed{y = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(z - ct) + f_2(z + ct)}$ (5)

Όπου f_1, f_2 τυχαίες συναρτήσεις (αυθαίρετες μεταξύ τους)

Πράγματι ισχύει: $\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \eta} + \frac{\partial f_2(\eta)}{\partial \eta} = 0 + g(\eta)$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial g(\eta)}{\partial \xi} = 0$$

$$dy(z,t) = \frac{\partial y}{\partial z}dz + \frac{\partial y}{\partial t}dt = \frac{\partial y}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta\right) + \frac{\partial y}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial t}{\partial \eta}d\eta\right) =$$

$$= \underbrace{(\qquad)}_{\frac{\partial y}{\partial \xi}} d\xi + \underbrace{(\qquad)}_{\frac{\partial y}{\partial \eta}} d\eta$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

.. Δεν αποδεχόμαστε όλες τις λύσεις. Μόνο τις φυσικά αποδεκτές ⇒ y συνεχείς, y μικρά, $\left.\frac{\partial y}{\partial z}\right| << 1$

Άσκηση #

Τριές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι λύσεις της κλ. κυμ. εξίσωσης

α) $y = Az + Bt$, A, B σταθερές

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$\frac{\partial y}{\partial z} = A$ & $\frac{\partial y}{\partial t} = B \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0$ & $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow$ η (α) ικανοποιεί την (1), αλλά δεν περιγράφει κύμα εφόσον η απομάκρυνση y δεν είναι μικρή για όλες τις τιμές των μεταβλητών $(z,$

β) $z^2 + c^2t^2 = y$

Είναι λύση της (1) αλλά δεν περιγράφει κύμα

γ) $y = 10 \sin kz \cos ct$

Δεν ικανοποιεί την (1)

δ) $y = e^{kz - ct}$

Δεν ικανοποιεί την (1).

ε) $y = 10 \sin kz \cos kct$

Ικανοποιεί την (1) & είναι φυσικά αποδεκτή διότι $\forall (z,t)$ $y \not\to \infty$

ζ) $f_1(z-ct) \to$ κύμα που διαδίδεται δεξιά με σταθ. ταχύτητα c & δεν αλλάζει σχήμα

$f_2(z-ct) \to$ — // — αριστερά — // — — // —

Πρόβλημα 4,1 (Pain)

$y = f_2(ct+x) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Λύση

$y = f_2(ct+x) = f_2(u)$ όπου $u = ct+x$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{df_2}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = f_2' \cdot 1 = f_2' \quad \left(f_2' = \frac{df_2}{du}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} f_2' = \frac{d}{du} f' \frac{\partial u}{\partial x} = f_2'' \cdot 1 = f_2''$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{df_2}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = f_2' c$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(f'c) = c\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = c f'' c = c^2 f''$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = f_2'' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} \Rightarrow f_2 \text{ λύση της κυμ. εξίσωσης}$$

Πρόβλημα 4,2 (Pain)

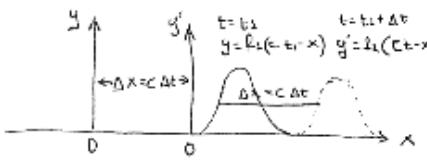
$y = f_1(ct-x)$, δεν μεταβαλ. με το χρόνο, y $t+\Delta t$ όπου $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$, εκφυλ. $y = f_2(ct+x)$

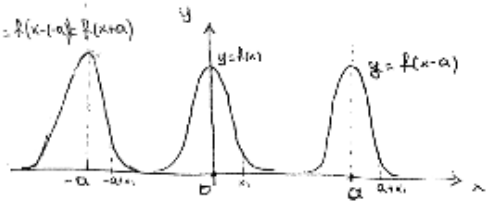
Λύση

1) $t = t_1$, $y = f_1(ct-x)$, c σταθερά

Για $t = t_1 + \Delta t$ όπου $\Delta t = \frac{\Delta x}{c} \Rightarrow y = f_1(ct_1 + c\Delta t - x) = f_1(ct_1 + \Delta x - x)$

Κάνω το μετασχηματισμό $x = x' + \Delta x \Rightarrow \Delta x - x = -x' \Rightarrow y = f_1(ct_1 - x') = y'$ → Άρα η συνάρτηση στη χρον. στιγμή t_1 & $t_1+\Delta t$ είναι ίδια με τη συνάρτηση στη χρον. στιγμή t_1 αλλά σε ένα σύστημα αναφοράς που έχει μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά Δx





– $f(x-a)$, $f(x+a)$ έχουν ίδιο σχήμα με $f(x)$ αλλά είναι μετατοπισμένες κατά a & $-a$

Απόδειξη

Έστω τυχαίο σημείο x_1. Για $x = x_1$: $f(x_1) = f(x_1)$

Για $x = a + x_1$: $f(x-a) = f(x_1 + a - a) = f(x_1)$

Για $x = -a + x_1$: $f(x+a) = f(-a + x_1 + a) = f(x_1)$

$\Big\}$ κοινό $\Rightarrow$ ίδιο $\forall x$

αν $a = ct$: $y = f(x-a) = f(x-ct) \Rightarrow$ κινείται κατακόρυφα προς τα δεξιά με ταχύτητα c

$y = f(x+a) = f(x+ct) \Rightarrow$ — // — προς τα αριστερά — // —

Πρόβλημα 4,3 (Pain)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \pm c \frac{\partial y}{\partial x}$$

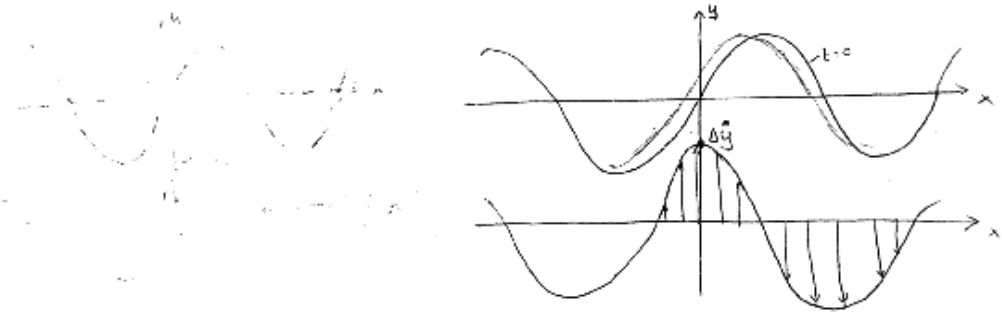
Λύση

$y = f(ct+x)$ θέτω $u = ct+x$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = c\frac{\partial y}{\partial x}$$

Ένα αρμονικό οδεύον κύμα $y = a\sin(\omega t + kz)$

$\frac{\partial y}{\partial x} = ak\cos(\omega t + kz)$ Άρα $U_\varepsilon = U_y = \frac{\partial y}{\partial t} = cka\cos(\omega t + kx)$



Άσκηση 20 (φυλλάδιο)

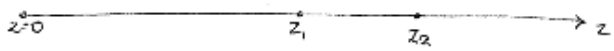
$A_0 = 1\,cm$

$\nu = 10\,Hz$

$U_y = 500\,cm/s$

$z_1 = 325\,cm$

$z_2 = 350\,cm$



$y(0,t) = A_0 \sin\omega t = A_0 \sin 2\pi\nu t$

$y(z,t) = A_0 \sin(\omega t - kz) = A_0 \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{z}{\lambda}\right) \Rightarrow y(z,t) = \sin 2\pi\left(10t - \frac{z}{50}\right)$

$U_\varphi = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu \Rightarrow \lambda = \frac{U_\varphi}{\nu} = \frac{500\,cm/s}{10\,s^{-1}} = 50\,cm$

$$y_1(z_1,t) = \begin{cases} 0, & t < z_1/v_1 = 325/500 = 0{,}65\ s. \\ \sin 2\pi(10 - 6{,}5), & t \geq 0{,}65\ sec \end{cases}$$

$$y_2(z_2,t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{z_2}{v_1} = 0{,}70\ s \\ \sin 2\pi(10t - 7{,}0), & t \geq 0{,}70\ s. \end{cases}$$

Άσκηση

$$y(z,t) = e^{-az^2 - bt^2 - 2\sqrt{ab}\, zt}$$

1) Προς ποια διεύθυνση διαδίδεται το κύμα;

2) Ποια η ταχύτητα του κύματος;

) Να σχεδιαστεί το κύμα $t=0$

$a = +144\ cm^{-2}$, $b = 9\ s^{-2}$

Λύση

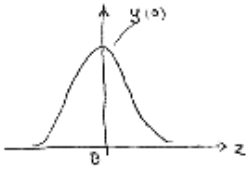
$f_1(z-ct)$
$f_2(z-ct)$ | $y = e^{-a(z+\sqrt{\frac{b}{a}}\,t)^2}$

α. Το κύμα διαδίδεται προς την $-z$ διεύθυνση.

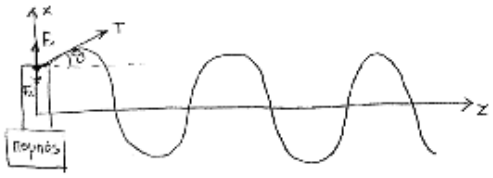
β. Η ταχύτητα είναι $v = \sqrt{\frac{b}{a}} = 0{,}25\ cm/s$

γ. $y(z,t) = e^{-144(z+0{,}25t)^2}$

$t=0 \Rightarrow y = e^{-144z^2}$



ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΟΔΕΥΟΝΤΑ ΚΥΜΑΤΑ ΣΕ ΧΟΡΔΗ (Βλ. 4,4, Pain 4,6)



3ος νόμος Νεύτωνα: $F_x = -F_x'$

1) $F_x = T\sin\theta \simeq T\cos\theta \tan\theta = T_0 \frac{\partial y}{\partial z} \Rightarrow F_x = T_0 \frac{\partial y}{\partial z}$ (1)

2) Αν διαδίδεται αρμονικό οδεύον κύμα στη χορδή $\sim y(z,t) = A\cos(\omega t - kz)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial z} &= A(-)\sin(\omega t - kz)(-k)\\ \frac{\partial y}{\partial t} &= A(-)\sin(\omega t - kz)\,\omega\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{k}{\omega}\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{1}{U_\phi}\frac{\partial y}{\partial t} \Rightarrow \boxed{F_x = -\frac{T_0}{U_\phi}\frac{\partial y}{\partial t}} \quad (2)$$

Η χορδή αστεί μια αντίδραση στην έξοδο του σωληνά, ανάλογη & αντίθετη στις ταχύτητας με την οποία ο πομπός εξαναγκάζει τη χορδή να κινηθεί.

.) Η σταθερά αναλογίας ονομάζεται ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

$$Z = \frac{T_0}{U_\phi} = \frac{T_0}{\sqrt{T_0/\rho_0}} = \sqrt{T_0\rho_0} = U_0\rho_0 \quad \left(U_\phi^2 = \frac{T_0}{\rho_0}\right) \quad \frac{kg}{m}s \quad (3)$$

4) Η ισχύς που παίρνει η χορδή από τον πομπό στη η ισχύς εξόδου του πομπού είναι $P = F_x' U = -F_x\frac{\partial y}{\partial t} = \left(Z\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) \Rightarrow \boxed{P(t) = Z\left(\frac{\partial y(0,t)}{\partial t}\right)^2}$ (4)

.) Τα ίδια ισχύουν & για ένα οποιοδήποτε $z \neq 0$. Το αριστερό σημείο εμφανίζεται σαν πομπός του δεξιού σημείου που είναι ο δέκτης

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{ίδιο}\\ \text{Σ}}}{P(z,t)} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ίδιο}\\ \text{αντίσταση}}}{Z}\left(\frac{\partial y}{\partial t}(z,t)\right)^2 \quad (5)$$

Η ενέργεια του πομπού δε χάνεται (π.χ. θερμότητα) μεταφέρεται από σημείο σε σημείο αν μπορεί να αποκτηθεί στην αρχική της μορφή σε ένα μακρινό σημείο (δέκτης) (η εξασθένιση → αμελητέα)

:) Μέση ισχύς : $y = A\cos(\omega t - kz) \rightsquigarrow \frac{\partial y}{\partial t} = -A\sin(\omega t - kz)\,\omega$ &

$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kz)$

$P(z,t) = Z A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kz)$, $\bar{P}(z) = Z A^2\omega^2\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t - kz)\,dt = Z A^2\omega^2\overline{\sin^2(\omega t - kz)} = Z A^2\omega^2\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\bar{P}(z) = \frac{1}{2} Z A^2\omega^2}$ (6) , Z : σύνθετη αντίσταση

Ασκήσεις

άσκηση 22 /φυλ

$\rho_0 = 0{,}1\ gr/cm$

$T_0 = 3{,}5 \cdot 10^7\ dyn$

$A_0 = 1\ cm$

$\nu = 100\ Hz$

$\bar{P} = ;$

Θεωρώ $P = Z\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$ (από θεωρία)

$Z = \sqrt{T_0 \rho_0}$

$y(z,t) = A_0 \cos(\omega t - kz) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kz)$

Συνεπώς $P(z,t) = Z\omega^2 A_0^2 \sin^2(\omega t - kz) = 4\pi^2 \nu^2 A_0^2 \sqrt{T_0 \rho_0}\ \sin^2(\omega t - kz)$

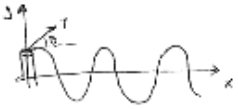
$\bar{P}(z) = 2\pi^2 \nu^2 A_0^2 \sqrt{T_0 \rho_0}\ \left(\overline{\sin^2(\omega t - kz)} = \frac{1}{2}\right)$

$\bar{P} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 100^2\ s^{-2} \cdot 1\ cm^2 \sqrt{3{,}5 \cdot 10^7 dyn \cdot 0{,}1 gr} = 3{,}69 \cdot 10^6\ erg/sec$

$\left(1\ W = 10^7\ \frac{erg}{sec}\right) \Rightarrow \bar{P} = 36{,}9\ W.$

άσκηση 4,7 (Pain)

$y = a \sin(\omega t - kx)$



Εγκάρσια δύναμη που ασκείται στον πομπό:

$F_y = -T\frac{\partial y}{\partial x}$

Στιγμιαία ισχύς: $P = Fu = -T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= -ka\cos(\omega t - kx) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \omega a \cos(\omega t - kx) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{k}{\omega}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$P = T\left(\frac{k}{\omega}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{T}{c}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = Z\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$

Αντικαθιστώ $\frac{\partial y}{\partial t} = \omega a \cos(\omega t - kx)$

$Z = \rho c$

$\Rightarrow P = Z\omega^2 a^2 \cos^2(\omega t - kx)$

$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T Z\omega^2 a^2 \cos^2(\omega t - kx)\,dt = \frac{1}{2} Z\omega^2 a^2 = \frac{1}{2}(\rho c)\omega^2 a^2 = c\left(\frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2\right)$

ρ: γρ. πυκνότητα, c: ταχύτητα στον Pain

$* \ \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2 = \frac{1}{2}\frac{dm}{dx}\omega^2 a^2 = \frac{d\bar{E}}{dx}$

$\omega^2 a^2 = v^2, \quad \bar{E} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow d\bar{E} = \frac{1}{2}dm\,v^2 = \frac{1}{2}dm\,\omega^2 a^2$

↳ κιν. ενέργεια στοιχ. τεμαχιδίου χορδής

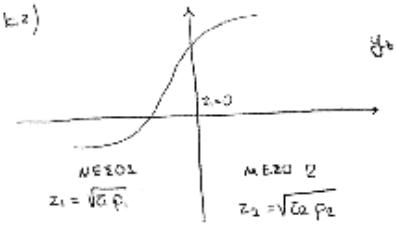
Άρα $\bar{P} = c\frac{d\bar{E}}{dx} = \frac{d\bar{E}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\bar{E}}{dt}$

ΑΝΑΚΛΑΣΗ - ΜΕΤΑΔΟΣΗ (Pain 11,7)

1) Κάθε κύμα που θα συναντήσει μια ασυνέχεια στις ιδιότητες ενός μέσου θα "διασπαστεί" σε ένα ανακλώμενο & ένα διαδιδόμενο

$\left\{ y_r = B \cdot e^{i(\omega t + kz)} \right.$ αντικ. κύμα προς αρνητ. κατ. $\left. \right\}$

2) $y_i = A e^{i(\omega t - kz)}$



$y_t = \Gamma e^{i(\omega t - kz)}$

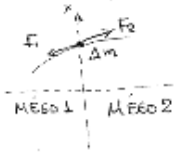
ΕΡΩΤΗΜΑ: ΒΙΑ=; ΓΙΑ=;

* θα βασιστώ στις οριακές συνθήκες ασυνέχειας (z=0)

1) ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΗΝ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ z=0

α) $y(z,t)$ συνεχής $\rightarrow y_1(0,t) = y_2(0,t) \Rightarrow y_i + y_r = y_t \Rightarrow (A+B)e^{i\omega t} = \Gamma e^{i\omega t} \Rightarrow \boxed{A+B=\Gamma}$ (1)

β) Η δύναμη επαναφοράς $F_x = -T\frac{\partial y}{\partial z}$ συνεχής



$x: \; T_2 \frac{\partial y_2}{\partial z} - T_1 \frac{\partial y_1}{\partial z} = \Delta m \cdot \gamma$

$\Delta m \rightarrow 0 \Rightarrow T_1 \frac{\partial y_1}{\partial z} - T_2 \frac{\partial y_2}{\partial z} = 0$

> Αν η συνισταμένη δύναμη στην απειροστή μάζα ήταν διάφορη του μηδενός ($F \neq 0$) θα είχαμε μία ∞ επιτάχυνση (που δεν επιτρέπεται)

$z=0: \; T_1 \frac{\partial y_1}{\partial z} = T_2 \frac{\partial y_2}{\partial z} \Rightarrow T_1 \frac{\partial}{\partial z}(y_i + y_r) = T_2 \frac{\partial y_t}{\partial z} \Rightarrow T_1 [-A k_1 + B k_1] e^{i\omega t} = -T_2 k_2 \Gamma e^{i\omega t} \; \forall t \Rightarrow$

$T_1 k_1 (A-B) = T_2 k_2 \Gamma \Rightarrow \boxed{Z_1 (A-B) = Z_2 \Gamma}$ (2)

* $Tk = T\frac{\omega}{v} = T\frac{\omega}{\sqrt{T/\rho}} = \omega\sqrt{T\rho} = \omega Z$

Όταν το κύμα περνά από το ΜΕΣΟ 1 στο ΜΕΣΟ 2:

Λύνοντας (1) & (2) $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{B}{A} = R_y = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \& \quad \frac{\Gamma}{A} = T_y = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}}$ (3)

"ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ"

.) R_y: ονομάζεται Συντελεστής Ανάκλασης Πλάτους (& Μεταβολής)

T_y: ονομάζεται Συντελεστής Διάδοσης Πλάτους (& Μεταβόλης)

.) $T_y = \frac{2Z_1}{Z_1+Z_2} = \frac{2Z_1 + Z_2 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(Z_1+Z_2)+(Z_1-Z_2)}{Z_1+Z_2} = 1 + R_y \Rightarrow \boxed{T_y = 1 + R_y}$

.) R, T

α) Ανεξάρτητα: ω Αν $y_i = \sum_n A_n e^{i(\omega_n t - k_n z)}$

$$y_r = \sum \frac{B_n}{A_n} A_n e^{i(\omega_n t + k_n z)} = \sum R_n(i\omega_n) A_n e^{i(\omega_n t + k_n z)} = R \sum_n A_n e^{i(\omega_n t + k_n z)} = R y_i$$

$(R(\omega) = R = \text{σταθ})$

β) Εξαρτώνται μόνο από τα z

γ) Πραγματικοί αριθμοί, $\Delta\phi = 0$, εκτός αν $Z_2 > Z_1 \Rightarrow R$ αρνητικό

Ήχος ενός κύματος από το άλλο

$\Rightarrow \Delta\phi = 180$ ότι αλλάζει το πλάτος αν ανακλάται

4) α. Συντελεστής ανάκλασης μέσης ισχύος $R_p = \frac{\overline{P_r}}{\overline{P_i}} = \frac{\frac{1}{2} z_1 \omega^2 B^2}{\frac{1}{2} z \omega^2 A^2} = \frac{B^2}{A^2} = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)^2$

(5)

β. Συντελεστής μετάδοσης μέσης ισχύος $T_p = \frac{\overline{P_t}}{\overline{P_i}} = \frac{\frac{1}{2} z_2 \omega^2 \Gamma^2}{\frac{1}{2} z_1 \omega^2 A^2} = \frac{4 z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}$

γ. $5α + 5β \Rightarrow \boxed{R_p + T_p = 1}$ (6)

$\Downarrow$

$\boxed{\overline{P_r} + \overline{P_t} = \overline{P_i}}$ (7) Ανακλώμενη + διαδιδόμενη = εισερχόμενο ισχύς

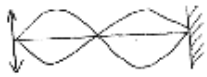
Προσοχή: Η ανακλώμενη + διαδιδόμενη ≠ εισερχόμενη μεταβολικά $\left(\begin{array}{l} T_y = 1 + R_y \ (\text{εξ } 4) \\ \Gamma = A + B,\ A \neq B + \Gamma \end{array}\right)$

$\boxed{\overline{P_1} - \overline{P_r} = \overline{P_t} \ \text{ή}\ P_1 = P_2}$ (8) Ο πομπός εκπέμπει μέση ισχύ $\overline{P_1}$ στο μέσο 1 που ισούται με την ισχύ $\overline{P_2}$ που διαδίδεται στό μέσο 2.

$\overline{P_1} = \overline{P_i} - \overline{P_r} = \frac{1}{2} z_1 \omega^2 A^2 - \frac{1}{2} z_1 \omega^2 B^2 = \frac{1}{2} z_1 \omega^2 A^2 \left(1 - \left(\frac{B}{A}\right)^2\right) = \overline{P_i}\left(1 - R_y^2\right)$ (9)

Όταν υπάρχει ανακλώμενο κύμα ο πομπός εκπέμπει μικρότερη ισχύ

Προσοχή: $P_1 = \left(-T_1 \frac{\partial y_1}{\partial z}\right) \frac{\partial y_1}{\partial t}$ όπου $y_1 = y_i + y_r$, Αν $R_y = \pm 1$ ο πομπός δεν εκπέμπει ισχύ (στην ουσία δημιουργούνται στάσιμα κύματα)



5) Τα βασικά μεγέθη y, $\frac{\partial y}{\partial t}$ - v_y, $\frac{\partial y}{\partial z}$ δεν έχουν τους ίδιους συντελεστές ανάκλασης & διάδοσης. α) Ανακλώμενο "κύμα" εγκαρσιοκίνησης ακόντιας $R \frac{\partial y}{\partial t} - R_y = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$

β) -//- κύμα της εφαπτόμενης δύναμης $\sim \frac{\partial y}{\partial z}$ έχει $R \frac{\partial y}{\partial z} = -R_y = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

Τα Τ υπολογίζονται από τη βασική σχέση $T = 1 + R$

Απόδειξη (ως 191)

$$\begin{cases} y_1 = y_i + y_r = A\cos(\omega t - k_1 z) + B\cos(\omega t + k_1 z) \\ P = FU \\ F = -T\dfrac{\partial y}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial z} &= k_1\left[A\sin(\omega t - k_1 z) - B\sin(\omega t + k_1 z)\right] \\ \frac{\partial y_1}{\partial t} &= -\omega\left[A\sin(\omega t - k_1 z) + B\sin(\omega t + k_1 z)\right] \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_1 = FU = \left(-T_1\frac{\partial y_1}{\partial z}\right)\frac{\partial y_1}{\partial t} =$$

$$= T_1 k_1 \omega\left[A^2\sin^2(\omega t - k_1 z) - B^2\sin^2(\omega t - k_2 z)\right] \xrightarrow{T_1 k_1 = \omega z_1} \overline{P_1} = z_1\omega^2\left[A^2\overline{\sin^2(\omega t - k_1 z)} -$$

$$- B^2\overline{\sin^2(\omega t + kz)}\right] = \frac{1}{2}z_1\omega^2 A^2\left[1 - \left(\frac{B}{A}\right)^2\right] = \overline{P_i}\left(1 - R_y^2\right)$$

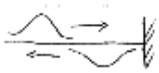
$$\begin{aligned} y_i &= A^2\cos(\omega t - kz) \\ \frac{\partial y_i}{\partial z} &= Ak\sin(\omega t - kz) \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} y_r &= B\cos(\omega t + kz) \\ \frac{\partial y_r}{\partial z} &= -\frac{B}{A}Ak\sin(\omega t + kz) \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \overset{z=0}{\Rightarrow} \frac{\partial y_r}{\partial z} = -\frac{B}{A}\frac{\partial y_i}{\partial z} \Rightarrow R_{y_z} = -R_y = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2}$$

ii) "Ακραίες περιπτώσεις"

z_2	∞	z_1	0	ΜΕΤΑΔΟΣΗ
R_y	-1	0	1	[-1, 1]
R_p	1	0	1	[0, 1]
T_y	0	1	2	[0, 2]
T_p	0	1	0	[0, 1]

για $z_2 \to \infty$

1. Πακτωμένο άκρο: $y_2 = 0$
2. Ανείρη σχοινί
3. Πλήρης ανάκλαση

4. Ανακλαστή πλάτους 

5. Σταθερά κύματα

6. $y_1(0) = y_2(0) = 0$

$y_1 = A\cos(\omega t - k_1 z) + B\cos(\omega t + k_1 z)$

$z=0$, $y_1 = (A+B)\cos\omega t = 0 \ \forall t \rightarrow A+B=0 \Rightarrow \frac{B}{A} = R_y = -1$, $R_y = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\left(\frac{Z_1}{Z_2} - 1\right)}{\frac{Z_1}{Z_2} + 1} = -1 \Rightarrow$

$\frac{Z_1}{Z_2} = 0$

Για $Z_2 = Z_1$

1. Πλήρης μετάδοση

2. Τέλεια προσαρμογή

3. Οδεύοντα κύματα

4. Αν $Z_1 = Z_2$ δε σημαίνει πάντοτε ότι το μέσο 1 ≡ μέσο 2.

π.χ. $Z_1 = Z_2 \rightarrow \bar{\rho}_1 \rho_1 = \tau_2 \rho_2$

Αν $\left.\begin{matrix} \tau_1 \neq \tau_2 \\ \rho_1 \neq \rho_2 \end{matrix}\right\}$ αλλά $\tau_1 \rho_1 = \tau_2 \rho_2 \Rightarrow Z_1 = Z_2$

Τότε $\left.\begin{matrix} U_1 = \sqrt{\tau_1/\rho_1} \\ U_2 = \sqrt{\tau_2/\rho_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow U_1 \neq U_2$

$\left.\begin{matrix} k_1 = \frac{\omega}{U_1} \\ k_2 = \frac{\omega}{U_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow k_1 \neq k_2 \ (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ (βλ άσκηση 25)

Για $Z_2 = 0$

1. Ελεύθερο άκρο  $f_y = T\frac{\partial y}{\partial z}$

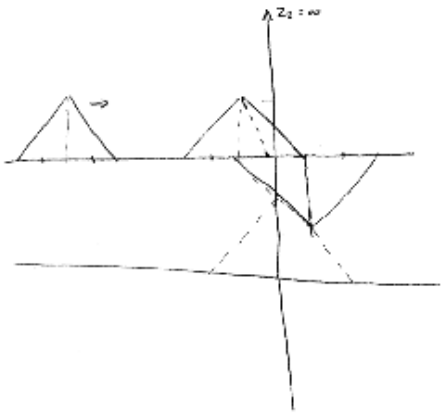
2. Μηδενική τριβή

3. Πλήρης ανάκλαση

4. Μη ανακλαστή του πλάτους 

$R_y = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = 1$

Πρόβλημα 4.4



Πρόβλημα 4.4 (Ροιν) (2,3-4ω.)

$y_1(z,t) = A_1 \cos(\omega t - kz + \phi_1)$

$y_2(z,t) = A_2 \cos(\omega t - kz + \phi_2)$ $\quad \bar{P} = ;$

$P = Z\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \quad y = y_1 + y_2 \quad , \quad P = Z\left(\frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial y_2}{\partial t}\right)^2 = Z\left(\frac{\partial y_1}{\partial t}\right)^2 + Z\left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)^2 + 2Z\frac{\partial y_1}{\partial t}\frac{\partial y_2}{\partial t}$

$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - kz + \phi)$

$\bar{P}_1 = Z\omega^2 A_1^2 \langle \sin^2(\omega t - kz + \phi_1)\rangle = \frac{1}{2} Z\omega^2 A_1^2$

$\bar{P}_2 = Z\omega^2 A_2^2 \langle \sin^2(\omega t - kz + \phi_2)\rangle = \frac{1}{2} Z\omega^2 A_2^2$

$2Z\left\langle \frac{\partial y_1}{\partial t}\frac{\partial y_2}{\partial t}\right\rangle = 2Z\omega^2 A_1 A_2 \langle \sin(\omega t - kz + \phi_1)\sin(\omega t - kz + \phi_2)\rangle$. Θέω $\omega t - kz = a$

$\langle \sin(a+\phi_1)\sin(a+\phi_2)\rangle = \cos\phi_1\cos\phi_2\langle \sin^2 a\rangle + \sin\phi_1\sin\phi_2\langle \cos^2 a\rangle + \cos\phi_1\sin\phi_2\langle \sin a\cos a\rangle + \cos\phi_2\sin\phi_1\langle \sin a\cos a\rangle$

$\Rightarrow \bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + 2\sqrt{\bar{P}_1\bar{P}_2}\cos(\phi_1 - \phi_2)$

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΝ (Βελ §5.4) (Ραν 4,10)

1. Μεταφορά κυμάτων από ένα μέσο σε ένα άλλο με διαφορές t χωρίς ΑΝΑΚΛΑΣΕΙΣ & χωρίς σημαντική απορρόφηση. ονομάζεται προσαρμογή της σύνθετης αντίστασης

2. Σημαντικό πρακτικό πρόβλημα κατά τη μεταφορά ενέργειας (καλώδια μεγάλων αποστάσεων) δίέλευση ορατού φωτός από αέρα-γυαλί-βύσσες

Είναι αδύνατο να μην έχουμε ανακλάσεις στη θέση z=0. Το έξυπνο κόλπο είναι να παρεμβάλλεις ένα μέσο (2) μεταξύ (1) & του (3) ώστε να δημιουργήσουμε δύο ανακλώμενα κύματα από την ασυνέχεια στο z=L ώστε η υπέρθεση στο z=0 να δώσει συνολικό πλάτος B=0.

(z_1)	(z_2)	(z_3)
$A_1 e^{i(\omega t - k_1 z)}$ →	$A_2 e^{i(\omega t - k_2 z)}$ →	$A_3 e^{i(\omega t - k_3 z)}$
$B_1 e^{i(\omega t + k_1 z)}$ ←	0 $B_2 e^{i(\omega t + k_2 z)}$ ←	$z=L$

Οριακές συνθήκες

$$\left.\begin{array}{ll} y \text{ συνεχής στο } z=0,\ L & \forall t \\ T\frac{\partial y}{\partial z} \text{ -''- } & z=0,\ L \quad \forall t \end{array}\right\} \begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$$

$$(1) \xrightarrow{z=0} A_1 + B_1 = A_2 + B_2$$

$$\left.(1) \xrightarrow{z=L} A_2 e^{-ik_2 L} + B_2 e^{ik_2 L} = A_3 e^{-ik_3 L}\right\} (3)$$

$$(2) \xrightarrow{z=0} T_1 k_1 (A_1 - B_1) = T_2 k_2 (A_2 - B_2) \Rightarrow z_1 (A_1 - B_1) = z_2 (A_2 - B_2) \quad \text{όπου } Tk = \omega z$$

$$\left.(2) \xrightarrow{z=L} T_2 k_2 \left(A_2 e^{-ik_2 L} - B_2 e^{ik_2 L}\right) = T_3 k_3 A_3 e^{-ik_3 L} \Rightarrow z_2 \left(A_2 e^{-ik_2 L} - B_2 e^{ik_2 L}\right) = z_3 A_3 e^{-ik_3 L}\right\} (4)$$

$$\frac{B_1}{A_1} = \rho = \frac{R_{12} + R_{23} e^{-2ik_2 L}}{1 + R_{12} R_{23} e^{-2ik_2 L}} \quad (\text{Βλ. άσκηση } 5,26 \text{ Βελ})$$

$$\text{όπου} \quad R_{12} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}, \quad R_{23} = \frac{z_2 - z_3}{z_2 + z_3}$$

α) Αν διαλέξω τη z_2: $R_{12} = R_{23} \Rightarrow z_2 = \sqrt{z_1 z_3}$

β) Αν το μήκος L είναι τέτοιο ώστε $e^{-2ik_2L} = -1 = e^{-i\pi} \Rightarrow 2k_2L = \pi$

$\rightsquigarrow 2\frac{2\pi}{\lambda_2}L = \pi \Rightarrow L = \frac{\lambda_2}{4}$

γ) $R = \frac{R_{12}\,(1-1)}{1-R_{12}^2} = 0 \quad (1-R_{12}^2 \neq 0)$

Το ολικό ανακλώμενο κύμα είναι μηδέν όταν $z_2 = \sqrt{z_1 z_3}$ & $L_2 = \frac{\lambda_2}{4}$