ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ
ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ
13/6/2016

ΘΕΜΑ 1. (i) (1,25 μ.) Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_A 2y dx dy$, όπου A το χωρίο που βρίσκεται στο α΄ τεταρτημόριο και φράσσεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$, την παραβολή $y^2 = x$ και τον ημιάξονα Oy.

(ii) (1,25 μ.) Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_A y dx dy$, όπου $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2x, \ \ y \geq 0\}$.

ΘΕΜΑ 2. (i) (1,25 μ.)Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_A \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dx dy$, όπου A το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

(ii) (1,25 μ.) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται μέσα στον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και μέσα στο ημισφαίριο $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

ΘΕΜΑ 3. (2,5 μ). Θεωρούμε το επίπεδο χωρίο D που φράσσεται από τις καμπύλες $x = 0$, $y = e$ και $y = e^x$. Να επαληθεύσετε το θεώρημα του Green για το D και το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$.

ΘΕΜΑ 4. (i) (1,2 μ). Έστω Ω το στερεό που φράσσεται από τις επιφάνειες με εξισώσεις $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ και $z = 0$. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$, $\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$ όπου S είναι το σύνορο του Ω και $\vec{n}$ είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα της S.

(ii) (1,3 μ). Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int\int_S z\, d\sigma$ όπου S είναι η επιφάνεια $z = 2y$ με $0 \leq x \leq 1$ και $0 \leq y \leq 2$.