ΣΕΜΦΕ 2ο Εξάμηνο - Επαναληπτική Εξέταση - Σεπτέμβριος 2014

Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. Α) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.
i) Να δείξετε ότι κάθε ορθογώνιο υποσύνολο του V είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. (0.5μ)

ii) Αν V_1, V_2 είναι διανυσματικοί υπόχωροι του V να δείξετε ότι:
α) $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$. β) $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$ (1.0μ)

Β) Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -4 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, να υπολογίσετε τον πίνακα $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$. (1.5μ)

Θ2. i) Να αποδείξετε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο ενός τετραγωνικού πίνακα A διαιρεί ακριβώς κάθε πολυώνυμο $q(z)$ που μηδενίζει τον πίνακα A (δηλαδή, $q(A) = 0$). (0.5μ)

ii) Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας A ο οποίος δεν έχει ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 3. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας Jordan J_A του A μπορεί να κατασκευαστεί αν είναι γνωστά το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του A. (0.5μ)

iii) Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha-4 & 4-\alpha \\ -3 & 1-\alpha & 1+\alpha \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ να μην διαγωνοποιείται με μετασχηματισμό ομοιότητας. Έπειτα, για την τιμή του α που θα βρείτε, να κατασκευάσετε πλήρως την κανονική μορφή Jordan του A και τον αντίστοιχο πίνακα ομοιότητας. (2.5μ)

Θ3. Έστω $V = \mathbb{R}^3$ και ο υπόχωρος M του V, που παράγεται από το διάνυσμα $v_1 = (1, -1, 1)$.
i) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $M^\perp$ του M, ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$, και μετά μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, η οποία να περιέχει τη βάση του $M^\perp$. (1.5μ)

ii) Να βρεθεί η ορθή προβολή του διανύσματος $u = (1, 0, 1)$ στον $M^\perp$. (1μ)

iii) Ο πίνακας A μιας τετραγωνικής μορφής $F(x)$ ισούται με $A = QDQ^\top$, όπου

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και Q ο ορθογώνιος πίνακας που έχει στήλες το διάνυσμα $\frac{v_1}{\|v_1\|}$ και τα διανύσματα της ορθοκανικής βάσης του $M^\perp$, που βρήκατε στο i) ερώτημα, αντίστοιχα. Να βρεθεί το είδος της επιφάνειας που παριστάνει η εξίσωση $F(x) = 1$. (1.0μ)

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ