ΣΧΟΛΗ ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΞΑΜΗΝΟ: 9°
ΜΑΘΗΜΑ: ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ
ΠΕΡΙΟΔΟΣ: ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ 2006-2007
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Α. ΚΕΧΑΓΙΑΣ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ: 2 ΩΡΕΣ
ΘΕΜΑΤΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ.
ΟΧΙ ΒΙΒΛΙΑ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ.

ΘΕΜΑ 1:

Τα μιόνια (μ) είναι υποατομικά σωματίδια με χρόνο ζωής $\tau_\mu=2\times10^{-6}$ s. Μπορούν να παραχτούν από κοσμική ακτινοβολία στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας. Καποια από αυτά μπορούν να ανιχνευτούν από κατάλληλες συσκευές (ανιχνευτές μιονίων) στην επιφάνεια της γής προτού διασπαστούν σύμφωνα με την αντίδραση

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

Θα περίμενε λοιπόν κανείς, μιόνια τα οποία παράχτηκαν στην ατμόσφαιρα, για παράδειγμα, στα 10km από την επιφάνεια της γης και τα οποία κινούνται με 0.999c , να διανύσουν μία απόσταση περίπου ίση με L=0.999c x $\tau_\mu \sim 600$ m προτούν διασπαστούν. Πως λοιπόν φτάνουν στην επιφάνεια της γης;

ΘΕΜΑ 2:

Α) Η μετρική που περιγράφει μία μελανή οπή είναι:

$$ds^2 = -(1-\frac{2GM}{r})dt^2 + \frac{1}{1-\frac{2GM}{r}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Από τα δύο φαινομενικά ανώμαλα «σημεία» r = 0, r = 2GM , δείξτε ότι το δεύτερο είναι απλά ανωμαλία συντεταγμένων.

Υπόδειξη: Βρείτε την μορφή του χώρου γύρω από r = 2GM κάνοντας την προσέγγιση r~2GM+ε όπου ε<<2GM και κρατώντας τον πρώτο κυρίαρχο όρο στο ε. Στην προσεγγιστική μετρική που θα βρείτε κάντε την αλλαγή μεταβλητών

$$t = 4GM\tanh^{-1}(\frac{X}{T}), \qquad \varepsilon = \frac{1}{8GM}(X^2 - T^2)$$

Β) Θεωρήστε τη γεωμετρία Ευκλείδειας «σκουληκότρυπας» με μετρική που δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = \frac{1}{(1+r^2)^2}(dx_1^{\,2} + dx_2^{\,2} + dx_3^{\,2} + dx_4^{\,2}) = \frac{1}{(1+r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\Omega_3^{\,2})$$

όπου $dx_1^{\,2} + dx_2^{\,2} + dx_3^{\,2} + dx_4^{\,2} = dr^2 + r^2 d\Omega_3^{\,2}$ είναι η μετρική τετραδιάστατου επίπεδου χώρου σε πολικές συντεταγμένες. Ποια η γεωμετρία για 1) $r \to 0$, 2) $r \to \infty$; Ποια η σχέση μεταξύ των δύο ασυμπτωτικών περιοχών;

Γ) Θεωρήστε τη γεωμετρία «σκουληκότρυπας» με μετρική που δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + (z^2 + b^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Ποια η γεωμετρία για 1) |z|>>b, 2) |z|<<b (b>0); Μπορείτε να φανταστείτε γιατί ονομάζεται «σκουληκότρυπα»;

ΘΕΜΑ 3.

Α) Το τετράνυσμα της επιτάχυνσης ενός σωματιδίου έχει χωροχρονικές συντεταγμένες

$$a^t = \frac{du^t}{d\tau} = a\sinh(a\tau), \qquad a^x = \frac{du^x}{d\tau} = a\cosh(a\tau), \qquad a^y = a^z = 0,$$

όπου τ είναι ο κατάλληλος (proper) χρόνος (ιδιοχρόνος) και $u^\mu = (u^t, u^x, 0, 0)$ είναι το τετράνυσμα της ταχύτητας του. Να βρεθεί η τροχιά του x=x(t), όπου t ο συντεταγμένος χρόνος καθώς και η ταχύτητα του dx/dt.

Β) Θεωρήστε ένα σωματίδιο με συντεταγμένες x(t),y(t),x(t) σε ένα σύστημα αναφοράς και x'(t),y'(t),z'(t) σε ένα δεύτερο σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα u ως προς το πρώτο κατά μήκος του άξονα x. Υπολογίστε την ταχύτητα $\vec{V}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'}$ του σωματιδίου στο δεύτερο σύστημα ως προς τη ταχύτητα $\vec{V} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ στο πρώτο σύστημα και δείξτε ότι για u/c<<1, προκύπτει ο νόμος πρόσθεσης ταχυτήτων της Νευτώνιας μηχανικής. Στη συνέχεια δείξτε ότι αν το σωματίδιο κινείται με ταχύτητα c στο πρώτο σύστημα (π.χ φωτόνιο), θα κινείται με ταχύτητα c και στο δεύτερο.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad \gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$