ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΜΕΤΡΟΥ
Εξετάσεις Κυρτής Ανάλυσης
13/10/2007

Θέμα 1. (i) Έστω A,B κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το $A+B = \{a+b: \ a \in A, \ b \in B\}$ είναι κυρτό.

(ii) Έστω A κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και λ_1, λ_2 θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Δείξτε ότι $\lambda_1 A + \lambda_2 A = (\lambda_1 + \lambda_2)A$. Ισχύει το ίδιο αν το A δεν είναι κυρτό; (Υπενθυμίζουμε ότι $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$)

Θέμα 2. (i) Δώστε τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και δείξτε με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$ ότι $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n$ στο $\mathbb{R}$ και $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

(ii) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι κάθε τοπικό ελάχιστο της f είναι και ολικό ελάχιστο.

Θέμα 3 (i) Δώστε τον ορισμό του ακραίου σημείου και του ακραίου υποσυνόλου ενός κυρτού συνόλου. Σχεδιάστε το σύνολο $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ και βρείτε τα ακραία σημεία και τα ακραία υποσύνολά του.

(ii) Διατυπώστε το θεώρημα Krein- Milman- Minkowski.

(iii) Αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό συμπαγές και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμική δείξτε ότι υπάρχει ακραίο σημείο a_0 του A ώστε $f(a_0) = max\{f(a) : a \in A\}$.

Θέμα 4. (i) Έστω A κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το εσωτερικό $IntA$ και η κλειστότητα $\overline{A}$ του A είναι κυρτά.

(ii) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό ώστε $IntA \neq \emptyset$. Δείξτε ότι $\overline{A} = \overline{IntA}$.

Θέμα 5. Έστω A κλειστό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A$ και $a_0 \in A$ τέτοιο ώστε $\|x_0 - a_0\| = min\{\|x_0 - a\| : a \in A\}$.

(i) Δείξτε ότι $< x_0 - a_0, a - a_0 > \leq 0$ για κάθε $a \in A$.

(ii) Αν το A είναι ένας γνήσιος γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ δείξτε ότι $< x_0 - a_0, a >= 0$, για όλα τα $a \in A$. Τι σημαίνει γεωμετρικά η ισότητα αυτή;