ΣΕΜΦΕ , Ε.Μ.Π. 6/9/05

6° Εξάμηνο

Ανάλυση Πινάκων και Εφαρμογές
(επιλογή 4 θεμάτων)

1. Για τους πίνακες **A**, **B** και **Γ** αποδείξατε

$$\text{rank}(\mathbf{AB\Gamma}) - \text{rank}(\mathbf{B\Gamma}) \geq \text{rank}(\mathbf{AB}) - \text{rank}(\mathbf{B}) \qquad 1.5\mu$$

2. Έστω οι πίνακες **A** και **B** είναι τύπου $\nu \times \mu$ και $\mu \times \nu$ αντίστοιχα και

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{I}_\nu & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \lambda \mathbf{I}_\mu \end{bmatrix}$$

I. Βρείτε πίνακα **P** κάτω τριγωνικό τέτοιον ώστε **PM** είναι σύνθετος άνω τριγωνικός και αποδείξατε την ισότητα

$$\lambda^{\mu} \det \mathbf{M} = \lambda^{\nu} \det\left(\lambda^2 \mathbf{I}_\mu - \mathbf{BA}\right) \qquad 1.5\mu$$

II. Βρείτε ανάλογη σχέση μεταξύ $\det\left(\lambda^2 \mathbf{I}_\nu - \mathbf{AB}\right)$ και $\det \mathbf{M}$ 1μ

III. Τι συμπεραίνετε για τις ιδιοτιμές των **AB** και **BA** ; 1.5μ

3. Αν για τον τετραγωνικό πίνακα **M** είναι **M*** = **MU**, όπου ο πίνακας **U** είναι ορθομοναδιαίος, αποδείξατε ότι **M** είναι κανονικός. 2μ

4. Για την Ευκλείδεια νόρμα του πίνακα **A** αποδείξατε την ισότητα

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1} \left|\mathbf{y}^* \mathbf{A} \mathbf{x}\right| \qquad 2.5\mu$$

5. Αν για τον πίνακα $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\nu \times \nu}$ είναι rank**A**=1, να βρείτε την ιδιάζουσα παραγοντοποίηση του. 2μ

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

Καλή Επιτυχία

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

1. Από την πρόταση 2.1 έχουμε

$$\operatorname{rank}(AB\Gamma) = \operatorname{rank}(B\Gamma) - \dim(\ker A \cap \operatorname{Im}(B\Gamma))$$

και

$$\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank} B - \dim(\ker A \cap \operatorname{Im} B)$$

Συνεπώς αρκεί ν' αποδειχθεί

$$\dim(\ker A \cap \operatorname{Im}(B\Gamma)) \leq \dim(\ker A \cap \operatorname{Im} B)$$

ή

$$\ker A \cap \operatorname{Im}(B\Gamma) \subseteq \ker A \cap \operatorname{Im} B$$

ή

$$\operatorname{Im}(B\Gamma) \subseteq \operatorname{Im} B$$

η οποία ισχύει.

2. I. Για $P = \begin{bmatrix} I_\nu & 0 \\ -B & \lambda I_\mu \end{bmatrix} \Rightarrow PM = \begin{bmatrix} \lambda I_\nu & A \\ 0 & \lambda^2 I_\mu - BA \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \det P \det M = \lambda^\nu \det(\lambda^2 I_\mu - BA)$$

$$\Rightarrow \lambda^\mu \det M = \lambda^\nu \det(\lambda^2 I_\mu - BA)$$

II. Για $Q = \begin{bmatrix} \lambda I_\nu & -A \\ 0 & I_\mu \end{bmatrix} \Rightarrow QM = \begin{bmatrix} \lambda^2 I_\nu - AB & 0 \\ B & \lambda I_\mu \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \det Q \det M = \lambda^\mu \det(\lambda^2 I_\nu - AB)$$

$$\Rightarrow \lambda^\nu \det M = \lambda^\mu \det(\lambda^2 I_\nu - BA)$$

III. Από τις I και II έχουμε

$$\lambda^{\nu-\mu} \det(\lambda^2 I_\mu - BA) = \lambda^{\mu-\nu} \det(\lambda^2 I_\nu - AB) \Rightarrow$$

$$k^\nu \det(k I_\mu - BA) = k^\mu \det(k I_\nu - AB)$$

όπου $k = \lambda^2$. Συμπέρασμα, οι μη μηδενικές ιδιοτιμές των AB, BA ταυτίζονται.

3. Έστω $M = QTQ^*$, η παραγοντοποίηση του M σύμφωνα με το Θεώρημα Schur. Αντικαθιστώντας στην ισότητα $M^* = MU$ έχουμε

$$T^* = TR \quad , \quad \text{όπου} \quad R = Q^* U Q$$

Ο πίνακας R είναι ορθογωνιακός, ως γινόμενο ορθογωνιακών πινάκων και επιπλέον

$$T^* T = T R R^* T^* = T T^*$$

Δηλαδή, T είναι κανονικός και τριγωνικός $\Rightarrow$ T διαγώνιος $\Rightarrow$ M κανονικός.

<u>Β' τρόπος</u>

$M^* = MU \Rightarrow M = (MU)^* = U^* M^*$. Συνεπώς,

$$M^* M = M U U^* M^* = M M^*$$

4. Άσκηση 5.5

5. Άσκηση 8.2