Εξετάσεις Πραγματικής Ανάλυσης, 21/02/2006

Θέμα 1 (α) Θεωρούμε τα ακόλουθα σύνολα

$$A_1 = \{(q,q) : q \in \mathbb{Q}\} \subseteq (\mathbb{R}^2, \rho_2),\ A_2 = \{(q,-q) : q \in \mathbb{Q}\} \subseteq (\mathbb{R}^2, \rho_2).$$

Βρείτε τα $\overline{A}_1$ τα $\overline{A}_2$.

(β) Έστω

$$A_3 = \{(\frac{1}{k}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}, k \leq n\} \subseteq (\mathbb{R}^2, \rho_2).$$

(i) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε $B_k = \{(\frac{1}{k}, \frac{1}{n}) : k \leq n\}$. Βρείτε το $\overline{B}_k$.

(ii) Αν (x,y) είναι σημείο συσσώρευσης του A_3, δείξτε ότι $y = 0$.

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, το $(x,0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του A_3.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Θέτουμε

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\},\ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}.$$

Δείξτε ότι τα σύνολα A, B είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και βρείτε το $A \cap B$.

Θέμα 2 (α) (i) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $U_1, U_2, ..., U_n$ ανοικτά υποσύνολα του X. Δείξτε ότι το σύνολο $\cap_{i=1}^n U_i$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X (δώστε τον ορισμό του ανοικτού συνόλου).

(ii) Δώστε παράδειγμα μιας ακολουθίας $(U_n)_n$ από ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ώστε το σύνολο $\cap_{n=1}^\infty U_n$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(β) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X.

(i) Θέτουμε $A' = \{x \in \overline{A} : x$ σημείο συσσώρευσης του $A\}$. Δείξτε ότι το σύνολο A' είναι κλειστό.

(ii) Αν $U \subseteq X$ ανοικτό, δείξτε ότι $U \cap A \neq \varnothing$ αν και μόνο αν $U \cap \overline{A} \neq \varnothing$.

Θέμα 3 (α) (i) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $\varepsilon > 0$. Δώστε τον ορισμό του ε-διαχωρισμένου υποσυνόλου του X και δείξτε ότι κάθε ε-διαχωρισμένο σύνολο είναι κλειστό.

(ii) Δείξτε ότι αν ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε κάθε ε-διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι αριθμήσιμο.

(iii) Αν ο (X,ρ) είναι συμπαγής, δείξτε ότι κάθε ε-διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο.

(β) (i) Διατυπώστε το Θεώρημα του Baire.

(ii) Δείξτε ότι αν ο μετρικός (X,ρ) είναι πλήρης, $X = \cup_{n=1}^\infty F_n$ όπου $F_n \subseteq X$ κλειστό για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(F_{n_0}) \neq \varnothing$.

(iii) Έστω ρ_1, ρ_2 ισοδύναμες μετρικές στον X και $x_0 \in X$ ώστε το x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης του (X,ρ_1). Δείξτε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης (X,ρ_2).

(iv) Δείξτε ότι δεν υπάρχει μετρική ρ στο $\mathbb{Q}$ ισοδύναμη με τη συνήθη ώστε ο $(\mathbb{Q},\rho)$ να είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Θέμα 4 (α) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής.

(i) Δείξτε ότι το $f[X]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(ii) Διατυπώστε το Λήμμα του Lebesgue, δώστε τον ορισμό της ομοιόμορφα συνεχούς συνάρτησης και δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) (i) Δώστε τον ορισμό της κατά σημείο και της ομοιόμορφης σύγκλισης μιας ακολουθίας συναρτήσεων.

(ii) Δώστε παράδειγμα μιας ακολουθίας συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο και δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

(iii) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς και $f : X \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν η ακολουθία $(f_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, τότε η f είναι συνεχής.

(iv) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς και $D \subseteq X$ πυκνό τέτοια ώστε $(f_n|_D)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f|_D$. Δείξτε ότι η $(f_n)_n$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε όλο τον X.