Εξετάσεις Πραγματικής Ανάλυσης, 27 Φεβρουαρίου 2003

Θέμα 1 (i) Δείξτε ότι το σύνολο $A_1 = \{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό μη συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
(ii) Αν $A_2 = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - \frac{2}{n^2} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3 - \frac{3}{n^3} : n \in \mathbb{N}\}$, βρείτε το $\overline{A_2}$ και δείξτε ότι είναι συμπαγές.
(iii) Δείξτε ότι το $\mathbb{Q}$ μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και ότι το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.
(iv) Αν $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 7x\}$ να βρεθούν τα $\mathrm{int}(A_3)$ και $\overline{A_3}$.
(Στο $\mathbb{R}$ και στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τη συνήθη μετρική.)

Θέμα 2 (α) Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνάρτηση.
(i) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής δείξτε ότι για κάθε βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον Y.
(ii) Δείξτε (παραθέτοντας κατάλληλο παράδειγμα) ότι αν η f υποτεθεί συνεχής (αντί ομοιόμορφα συνεχής) τότε δεν ισχύει αντίστοιχο συμπέρασμα.

(β) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε η σφαίρα $S(x, \varepsilon_x)$ να είναι πεπερασμένο σύνολο. Αποδείξτε ότι κάθε υποσύνολο του X είναι ανοικτό.

Θέμα 3 (α) Έστω (X, ρ) ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:
(i) Αν $(C_i)_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, τότε $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.
(ii) Ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(β) Αν F, G είναι συμπαγή μη κενά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, ρ) δείξτε ότι υπάρχουν $x_0 \in F$ και $y_0 \in G$ ώστε $\rho(F, G) = \rho(x_0, y_0)$ (όπου $\rho(F, G) = \inf\{\rho(x, y) : x \in F,\ y \in G\}$).

Θέμα 4 (α) Έστω X ένα σύνολο, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ μια ακολουθία συναρτήσεων . Πότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται κατά σημείο βασική και πότε κατά σημείο συγκλίνουσα; Δείξτε ότι αν η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κατά σημείο βασική τότε υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο.

(β) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ συστολή (δηλ. υπάρχει $C < 1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \leq C\rho(x, y)$ για κάθε $x, y, \in X$). Δείξτε ότι:
(i) $\mathrm{diam}\, f^n(X) \to 0$. (Υπόδειξη: Είναι $\mathrm{diam}\, X < \infty$ αφού (X, ρ) συμπαγής.)
(ii) Υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = \{x_0\}$ και ότι $f(x_0) = x_0$.

Θέμα 5 (α) Έστω (X, ρ) ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ πυκνό υποσύνολο του X ώστε η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι βασική. Δείξτε ότι το σύνολο $X \setminus D$ περιέχει το πολύ ένα σημείο.

(β) Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισοσυνεχής ακολουθία στο $C[a, b]$.
(i) Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x) - f_n(y)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x, y \in [a, b]$.
(ii) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Arzela δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και ακολουθία πραγματικών αριθμών $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε η ακολουθία $g_n = f_{k_n} - c_n$, $n = 1, 2, \ldots$ να συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια $g \in C[a, b]$.