Εξετάσεις Πραγματικής Ανάλυσης
6 Οκτωβρίου 2005

Θέμα 1

(α). 1. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ κλειστά. Δείξτε ότι το $A \times B$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

2. Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$, δείξτε ότι το $A \times B$ είναι πυκνό στο $\overline{A} \times \overline{B}$.

3. Χρησιμοποιώντας τα 1 και 2, δείξτε ότι για $A, B \subseteq \mathbb{R}$, έπεται ότι $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

(β). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_n = \{(\frac{1}{n}, m) : m \in \mathbb{N} \text{ με } m \leq n\} \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

1. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο A_n είναι συμπαγές.

2. Αν $A = \cup_n A_n \subseteq \mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $\overline{A} = A \cup \{(0, m) : m \in \mathbb{N}\}$.

Θέμα 2

(α). 1. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x_0 \in X$. Πότε το x_0 λέγεται οριακό σημείο του A και πότε σημείο συσσώρευσης.

2. Για $(X, \rho) = (\mathbb{R}, \rho_{|\cdot|})$, δώστε παράδειγμα ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ ώστε το x_0 να είναι οριακό σημείο του A αλλά όχι σημείο συσσώρευσης, και το x_1 σημείο συσσώρευσης του A (Δικαιολογείστε την απάντησή σας).

(β). 1. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος ώστε κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι τελικά σταθερή. Δείξτε ότι για κάθε $x \in X$, υπάρχει $\epsilon_x > 0$ με $S(x, \epsilon_x) = \{x\}$ και περιγράψτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : (X, \rho) \to (\mathbb{R}, \rho_{|\cdot|})$.

2. Δώστε παράδειγμα συνεχούς $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ακολουθιών $(x_n)_n$ και $(y_n)_n$ στο $\mathbb{R}$ ώστε $|x_n - y_n| \to 0$ και $|f(x_n) - f(y_n)|$ δεν συγκλίνει στο 0.

Θέμα 3

(α). 1. Διατυπώστε την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και δείξτε ότι ο (X, ρ) είναι συμπαγής αν και μόνο αν για τις οικογένειες των κλειστών υποσυνόλων του X ικανοποιείται η ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.

2. Δείξτε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.

(β). 1. Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και d ισοδύναμη μετρική στον X. Είναι σωστό ότι ο (X, d) είναι πλήρης; Αν όχι, δώστε αντιπαράδειγμα.

2. Τι συμπεραίνετε στο προηγούμενο ερώτημα όταν ο (X, ρ) είναι συμπαγής;

Θέμα 4

(α). 1. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και B μια οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του X. Πότε η B λέγεται βάση περιοχών για την τοπολογία του X;

2. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος.

(ii) Ο (X, ρ) έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών.

(β). Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $D \subseteq X$ τέτοιο ώστε το D και το $X \setminus D$ να είναι πυκνό στο X. Δίνονται επίσης $f_1, f_2 : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Ορίζουμε $g : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{αν } x \in D \\ f_2(x), & \text{αν } x \in X \setminus D. \end{cases}$$

Έστω $x_0 \in X$.

1. Αν $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, δείξτε ότι το x_0 είναι σημείο συνέχειας της g.
2. Αν $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$, δείξτε ότι η g δεν είναι συνεχής στο x_0.

Θέμα 5

Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f_1, ..., f_n : X \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει $i_0 \in \{1, ..., n\}$ ώστε $f_{i_0}(x) \neq f_{i_0}(y)$.

(α). Δείξτε ότι η

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(y)|$$

είναι μετρική στον X.

(β). Δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$ αν και μόνο αν $f_i(x_n) \to f_i(x)$ για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$.

(γ). Δείξτε ότι οι μετρικές ρ και d είναι ισοδύναμες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!