Εξετάσεις Πραγματικής Ανάλυσης, 21/05/2007

Θέμα 1 (α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.

(i) Δώστε τον ορισμό της κλειστότητας ενός $A \subseteq X$.

(ii) Δείξτε ότι $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(iii) Αν x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ το σύνολο $S(x_0, \epsilon) \cap A$ είναι άπειρο.

(β) Δώστε τον ορισμό του ανοικτού υποσυνόλου του μετρικού χώρου (X, ρ) και δείξτε τα ακόλουθα.

(i) Για κάθε $x_0 \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$ η ανοικτή σφαίρα $S(x_0, \epsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο.

(ii) Αν $V_1, V_2, ..., V_n$ είναι ανοικτά στον (X, ρ) τότε η τομή $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ είναι επίσης ανοικτό.

(iii) Αν $V_1, V_2, ..., V_n$ είναι ανοικτά και ξένα ανα δύο και ισχύει ότι $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ τότε για κάθε $i = 1, ..., n$ το V_i είναι κλειστό.

Θέμα 2 (α) (i) Δίνεται ακολουθία $((a_n, b_n))_n$ στον $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ και $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι $(a_n, b_n) \xrightarrow{\rho_2} (a, b)$ αν και μόνο αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$.

(ii) Χρησιμοποιώντας το (i) δείξτε ότι η $+ : (\mathbb{R}^2, \rho_2) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

(iii) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγή δείξτε ότι $A \times B$ είναι συμπαγές στον $\mathbb{R}^2$.

(iv) Χρησιμοποιώντας τα (ii) και (iii) δείξτε ότι αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγή τότε το $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ είναι συμπαγές.

(β) Δίνονται τα σύνολα $\Gamma = \{(x, 1/x) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ και $\Delta = \{(-x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.

(i) Δείξτε ότι τα Γ, Δ είναι κλειστά.

(ii) Δείξτε ότι $(0, 0) \in \overline{\Gamma + \Delta}$ και ότι το $\Gamma + \Delta$ δεν ειναι κλειστό.

Θέμα 3 (α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.

(i)Αν $A \subseteq X$ έχει την ιδιότητα ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_n \subseteq A$ υπάρχει υπακολουθία της $(x_{n_k})_k$ και $x \in X$ ώστε η $(x_{n_k})_k$ να συγκλίνει στο x, τότε δείξτε ότι το $\overline{A}$ είναι συμπαγές.

(ii) Αν ο (X, ρ) είναι συμπαγής μετρικός χώρος δείξτε ότι είναι πλήρης.

(β) (i) Δείξτε ότι αν $f_n : (X, \rho) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, τότε και η f είναι συνεχής.

(ii) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων.

1. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{n} sin(n^2 x), n = 1, 2, ...$
2. $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{n+x}, n = 1, 2, ...$
3. $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{n+x}, n = 1, 2, ...$

Θέμα 4 (α) ~~(i)~~ Έστω $\mathcal{F} \subset C[a,b]$. Δώστε τον ορισμό της ισοσυνέχειας για την οικογένεια $\mathcal{F}$.

(ii.) Έστω $K \subset (C[a,b], \rho_\infty)$, συμπαγές. Δείξτε ότι το K είναι ισοσυνεχές.

(β) Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων κατά σημείο φραγμένη, δηλαδή για κάθε $x \in X$ υπάρχει $C_x > 0$ ώστε $\sup\{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} < C_x$. Δείξτε ότι υπάρχει $U \subset X$ ανοικτό ώστε η ακολουθία $(f_n|U)_n$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$, $\forall x \in U$, $\forall n \in \mathbb{N}$.