ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ» ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατ. Μαθηματικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 8/10/2004, ΩΡΑ:15.00

Θέμα 1° : **(α) (Μον. 0.75).** Να βρεθεί το συνημιτονικό ανάπτυγμα Fourier της

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x<2 \end{cases}.$$

Που συγκλίνει η σειρά;

(β) (Μον. 0.25). Τι τύπου είναι η διαφορική εξίσωση $u_{xy}(x,y)=0$; Να επιλυθεί και να δοθεί μία ειδική λύση.

(γ) (Μον. 1.5). Να λυθεί το πρόβλημα Cauchy:

$$xu_x - yu_y = 0, \quad u=u(x,y),$$

όταν $u(x,y)=y^2$ πάνω στην καμπύλη C: $y=x$, $x>0$.

Θέμα 2° : **(α) (Μον. 1.5).** Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(\rho,\varphi)=\rho\cos\varphi, \quad 1<\rho<2, \ 0\le\varphi<2\pi,$$
$$u(1,\varphi)=5\sin\varphi, \quad u(2,\varphi)=\cos\varphi.$$

(β) (Μον. 0.25). Για ποιές τιμές του A το πρόβλημα,

$$\Delta u(\rho,\varphi)=0, \quad 0<\rho<3, \ 0\le\varphi<2\pi,$$
$$\frac{\partial u(3,\varphi)}{\partial\rho}=A\cos\varphi, \quad \text{επιλύεται;}$$

(γ) (Μον. 0.75). Να δώσετε σε ολοκληρωτική μορφή τη λύση του προβλήματος:

$$\Delta u(x,y)=0, \quad \underset{\sim}{x}=(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty),$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial \underset{\sim}{n}}=f(x), \quad u(0,y)=g(y),$$

όπου g, f γνωστές συναρτήσεις και $\underset{\sim}{n}$ η εξωτερική κάθετος.

Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον $\mathbb{R}^2$:

$$E(\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{x}')=\frac{1}{2\pi}\ln[(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2}.$$

Θέμα 3°: (Μον. 2). (α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \qquad 0 < x < 3, \ y(0) = y(3) = 0.$$

(β) Είναι η εξίσωση σε μορφή Sturm-Liouville; Να δώσετε τη σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από αυτό το πρόβλημα.

(γ) Στη συνέχεια να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$y''(x) + \Lambda y(x) = -2\sin\frac{5\pi x}{3} - 7\sin\frac{7\pi x}{3}, \qquad 0 < x < 3, \ y(0) = y(3) = 0,$$

για διάφορες τιμές του $\Lambda \in \mathbb{R}$.

Θέμα 5°: (Μον. 2). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$u_t(x,t) = 5u_{xx}(x,t) - 30x, \quad 0 < x < 3, \ t > 0,$$
$$u_x(0,t) = u(3,t) = 1, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = x^3 + x - 28, \quad 0 < x < 3.$$

Θέμα 6°: (Μον. 1). Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, να δείξετε ότι η λύση για το πρόβλημα,

$$u_t = k u_{xx} + q(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

είναι: $$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t \frac{q(s,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-(x-s)^2/[4k(t-\tau)]} d\tau \right) ds ,$$

(υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier). Ποια (ποσότητα) είναι η συνάρτηση Green για το πρόβλημα;

Δίνονται:

1. $\mathbf{F}\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{isx} \, dx = \hat{u}(s,t),$
2. $\mathbf{F}^{-1}\{\hat{u}(s,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(s,t) e^{-isx} \, ds = u(x,t),$
3. $\mathbf{F}\{u_{xx}(x,t)\} = (-is)^2 \hat{u}(s,t).$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**