ΣΕΜΦΕ ΔΙΑΚΡΙΤΑ 4-9-03

1) Αποδείξετε ότι:

α) $F_n = 5F_{n-4} + 3F_{n-5}$

β) Κάθε πέμπτος αριθμός Fibonacci είναι πολλαπλάσιο του 5. Πράγματι $F_5 = 5, F_{10} = 55 = 5.11$

2) α) Δείξτε ότι (Lucas): $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots = F_{n+1}$

β) Ένα σύνολο ακεραίων λέγεται <u>παχύ</u> αν τα στοιχεία του είναι μεγαλύτερα ή ίσα από τον πληθικό του αριθμό.
π.χ το σύνολο {6,10,11,20,33,34) είναι παχύ ενώ το {2,100,200} δεν είναι. Το Φ θεωρείται παχύ.
Εστω f(n) το πλήθος των παχιών υποσυνόλων του {1,2...,n}. Εχουμε f(3)=5 διότι τα Φ{1}, {2}, {3} και {2,3} είναι τα 5 παχιά υποσύνολα του {1,2,3}.
Δείξτε ότι f((n) = F_{n+2}. (Andrews)

3) Εστω a_n το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να φτιάξουμε ένα

$2 \times n$ ορθογώνιο με, προφανώς n, μικρά ορθογώνια διαστάσεως 1×2 (ντόμινα). Το σχήμα δείχνει δύο
από τους α_5 τρόπους.

α) Υπολογίστε τα α_1 , α_2, α_3, α_4, α_5

β) Βρεστε μία αναδρομική σχέση για το α_n

~~4)~~ α) Ποια σχέση μας δίνει το πλήθος τοποθέτησης n διακεκριμένων σφαιρών σε m ίδια κουτιά όπου κάποια από τα κουτιά μπορεί να είναι άδεια;

β)Υπολογίστε το $\left\{ {n \atop 2} \right\} = S(n,2)$.

βαθμοί θ1..3 , θ2..3, θ3...3 , θ4...1.