ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Επαναληπτική Εξέταση στη Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ
ΟΜΑΔΑ: Β

5 Νοεμβρίου, 2011

Θέμα 1. (α′) Να εξεταστεί αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(e^{2x}+1)(e^{-2x}+1)}\,dx$$

συγκλίνει και αν ναι να υπολογιστεί. (1,3 μον.)

(β′) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{3n}}{n8^n}\,.$$

(1,2 μον.)

Λύση.

(α′) Επειδή για κάθε $x \geq 0$ είναι

$$0 < \frac{1}{(e^{2x}+1)(e^{-2x}+1)} < \frac{1}{e^{2x}+1} < \frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = 1/2$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα I θα συγκλίνει. Είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(e^{2x}+1)(e^{-2x}+1)}\,dx &= \int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}\,dt \qquad\qquad (\text{αντικατάσταση } t = e^{2x}+1) \\ &= -\frac{1}{2t} + c = -\frac{1}{2(e^{2x}+1)} + c\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$I = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2(e^{2x}+1)} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,.$$

(β′) Αν $c_n = (x-3)^{3n}/n8^n$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|x-3|^3}{8} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{|x-3|^3}{8}\,.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$, αν και μόνο αν $|x-3|^3 < 8$ και ισοδύναμα $|x-3| < 2$. Δηλαδή, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 2$.
(i) Αν $x-3 = 2 \Leftrightarrow x = 5$, έχουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ η οποία ως γνωστόν αποκλίνει.
(ii) Αν $x-3 = -2 \Leftrightarrow x = 1$, έχουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ η οποία συγκλίνει από το κριτήριο του Leibniz για εναλλάσσουσες σειρές.
Άρα, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $I = [1, 5)$.

■

Θέμα 2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^3}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

(α′) Εξετάστε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$. (0,5 μον.)

(β′) Αν $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ είναι ένα οποιοδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου, να βρεθεί η παράγωγος της f στο $(0,0)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u}$. (0,5 μον.)

(γ′) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α′) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$. Πράγματι, για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ είναι

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= \frac{\left|y^3 - x^3\right|}{x^2+y^2} \\ &\leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2+y^2} \\ &\leq |x| + |y| \end{aligned}$$

και επομένως

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \ .$$

(β′) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου. Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t^3\left(u_2^3 - u_1^3\right)/t^2\left(u_1^2+u_2^2\right)}{t} \\ &= \frac{u_2^3 - u_1^3}{u_1^2+u_2^2} \\ &= u_2^3 - u_1^3 \, . \qquad (\|\mathbf{u}\|_2^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1) \end{aligned}$$

Δηλαδή η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ υπάρχει σε κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και ισούται με $u_2^3 - u_1^3$.

(γ′) Είναι

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \frac{-x^3/x^2}{x} = -1 \text{ για κάθε } x \neq 0 \text{ και επομένως } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1.$$

Παρόμοια,

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \frac{y^3/y^2}{y} = 1 \text{ για κάθε } y \neq 0 \text{ και επομένως } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$

Αν υποθέσουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$, θα πρέπει να είναι

$$\begin{aligned} f(h,k) &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \\ &= -h + k + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \, . \qquad (\text{με } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0) \end{aligned}$$

Τότε, για κάθε $(h,k) \neq (0,0)$

$$\frac{k^3-h^3}{h^2+k^2} = -h+k+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2} \Leftrightarrow \varepsilon(h,k) = \frac{hk^2-kh^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}\,.$$

Όμως, κατά μήκος των ευθειών $k=\lambda h$, $\lambda \neq 0,1$, έχουμε

$$\varepsilon(h,\lambda h) = \frac{\lambda^2-\lambda}{(1+\lambda^2)^{3/2}}\,, \qquad h>0$$

και επομένως

$$\lim_{h\to 0^+} \varepsilon(h,\lambda h) = \frac{\lambda^2-\lambda}{(1+\lambda^2)^{3/2}} \neq 0\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα, η συνάρτηση f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$.

■

Θέμα 3. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3\sin(y/x) & \text{αν } x\neq 0\,, \\ 0 & \text{αν } x=0\,. \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. (1,5 μον.)

Λύση. Για κάθε $y\neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x-0} \\ &= \lim_{y\to 0} x^2\sin(y/x) \\ &= 0\,. \qquad \left(\left|x^2\sin(y/x)\right| \leq x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0\right) \end{aligned}$$

Επίσης εύκολα φαίνεται ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.
Για κάθε $x\neq 0$ είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y-0} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{x^3\sin(y/x)}{y} \\ &= x^2\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y/x)}{y/x} \\ &= x^2\lim_{y\to 0}\cos(y/x) \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\ &= x^2\,. \end{aligned}$$

<u>*2ος τρόπος*</u>. Για κάθε $x\neq 0$ είναι

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \left.\frac{d}{dy}f(x,y)\right|_{y=0} = x^2\cos(y/x)\big|_{y=0} = x^2\,.$$

Αν $x=0$, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0\,.$$

Επομένως,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0\,.$$

και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = 0$$

■

Θέμα 4. (α′) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 - y^2$ στο σημείο $M(5,4)$ της υπερβολής $x^2 - y^2 = 9$, κατά την κατεύθυνση της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο M. (1 μον.)

(β′) Θεωρούμε την επιφάνεια με εξίσωση $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, όπου η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Αποδείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο (x_0, y_0, z_0), $x_0 \neq 0$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (1 μον.)

Λύση.

(α′) Η διανυσματική παραμετρική εξίσωση της υπερβολής $x^2 - y^2 = 9$ που βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο είναι

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \sqrt{t^2-9}\,\mathbf{j}\,, \quad |t| \geq 3\,.$$

Επειδή $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + \left(t/\sqrt{t^2-9}\right)\mathbf{j}$, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της υπερβολής στο σημείο $M = \mathbf{r}(5) = (5,4)$ είναι

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}'(5)}{\|\mathbf{r}'(5)\|_2} = \frac{4}{\sqrt{41}}\left(\mathbf{i} + \frac{5}{4}\mathbf{j}\right)\,.$$

Επίσης $f_x(5,4) = 10$ και $f_y(5,4) = -8$. Επομένως, επειδή η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 - y^2$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $M(5,4)$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(5,4) = \nabla f(5,4)\cdot \mathbf{u} = (10,-8)\cdot \frac{4}{\sqrt{41}}\left(1, \frac{5}{4}\right) = 0\,.$$

(β′) Ως γνωστόν, η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας στο σημείο (x_0, y_0, z_0) δίνεται από τον τύπο

$$z - z_0 = z_x(x_0,y_0)(x-x_0) + z_y(x_0,y_0)(y-y_0)\,.$$

Για $x_0 \neq 0$ είναι

$$z_0 = x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right),\ z_x(x_0,y_0) = f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0} f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \text{ και } z_y(x_0,y_0) = f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right).$$

Επομένως, η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας στο σημείο (x_0, y_0, z_0), $x_0 \neq 0$, είναι

$$z = \left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0} f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right] x + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) y\,.$$

Το επίπεδο διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0,0)$.

■

Θέμα 5. (α′) Έστω η συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$, $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\right\}$, με $f(x,y) = \varphi(x/y)$, όπου η $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^2. Αν

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{x}{y^3}\,, \quad \text{για κάθε } (x,y) \in U, \tag{1}$$

να αποδειχθεί ότι η φ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\left(t^2-1\right)\varphi''(t)+2t\varphi'(t)=t\,, \qquad \forall t\in\mathbb{R}\,.$$

(1 μον.)

(β′) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πολλαπλασιαστών του Lagrange, να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$ πάνω στη σφαίρα με εξίσωση $x^2+y^2+z^2=9$. (1 μον.)

Λύση.

(α′) Η συνάρτηση $f(x,y)=\varphi(x/y)$ είναι κλάσης C^2 στο U. Έχουμε

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right) \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{1}{y^2}\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{2x}{y^3}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right) \end{cases},$$

για κάθε $(x,y)\in U$. Αντικαθιστώντας στη (1) παίρνουμε

$$\frac{2x}{y}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2-1\right)\varphi''\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{y}\,, \quad \text{για κάθε } (x,y)\in U$$

και ισοδύναμα

$$\left(t^2-1\right)\varphi''(t)+2t\varphi'(t)=t\,, \qquad \forall t\in\mathbb{R}\,.$$

(β′) Αν $g(x,y,z):=x^2+y^2+z^2-9$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πολλαπλασιαστών του Lagrange, τα κρίσιμα σημεία της f θα πρέπει να ικανοποιούν το σύστημα

$$\left\{\ \nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)\ \right\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \\ f_z=\lambda g_z \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2xy^2z^2=2\lambda x \\ 2yx^2z^2=2\lambda y \\ 2zx^2y^2=2\lambda z \end{Bmatrix}.$$

Αν $x\neq 0$, $y\neq 0$ και $z\neq 0$, τότε $\lambda=-y^2z^2=-x^2z^2=-x^2y^2$. Επομένως έχουμε $x^2=y^2=z^2$, $\lambda=-x^4$ και κατά συνέπεια

$$x=\pm\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{3} \text{ και } z=\pm\sqrt{3}\,.$$

Άρα,

$$\max f=f\left(\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{3}\right)=27\,.$$

Ας σημειωθεί ότι αν ένα από τα x, y, z είναι μηδέν, τότε η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της που είναι το μηδέν.

■

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες