ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Επαναληπτικές Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

8 Οκτωβρίου, 2012

Θέμα 1. Έστω $\mathcal{M}$ η σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και έστω m^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue.

(α′) Αν $E \subset \mathbb{R}$ με $m^*(E) = 0$, αποδείξτε ότι $E \in \mathcal{M}$. (0,5 μον.)

(β′) Αν $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, αποδείξτε ότι $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$. (1 μον.)

(γ′) Έστω $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ η συμμετρική διαφορά των συνόλων $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Αν $m^*(A \triangle B) = 0$ και $B \in \mathcal{M}$, αποδείξτε ότι $A \in \mathcal{M}$. (0,8 μον.)

Λύση.

(α′) Παραπέμπουμε στις σημειώσεις του μαθήματος.

(β′) Παραπέμπουμε στις σημειώσεις του μαθήματος.

(γ′) Επειδή $A \setminus B, B \setminus A \subseteq A \triangle B$ και $m^*(A \triangle B) = 0$, είναι $m^*(A \setminus B) = m^*(B \setminus A) = 0$ και κατά συνέπεια $A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{M}$. Όμως

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

με $A \setminus B \in \mathcal{M}$ και $A \cap B = B \setminus (B \setminus A) \in \mathcal{M}$. Άρα, $A \in \mathcal{M}$.

■

Θέμα 2. Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ ο χώρος μέτρου του Lebesgue και έστω $X \in \mathcal{M}$.

(α′) (**Λήμμα Borel-Cantelli**) Αν (E_n) είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του X με $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty$, αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε άπειρο το πλήθος E_n, δηλαδή το $\limsup E_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, έχει μέτρο Lebesgue μηδέν. (1 μον.)

(β′) Έστω (f_n), $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\{x \in X : |f_n(x)| > 1\} < \infty\,,$$

αποδείξτε ότι

$$-1 \leq \underline{\lim}\, f_n(x) \leq \overline{\lim}\, f_n(x) \leq 1 \text{ σχεδόν για κάθε } x \in X\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α′) Παραπέμπουμε στις σημειώσεις του μαθήματος.

(β′) Έστω $E_n := \{x \in X : |f_n(x)| > 1\}$. Η (E_n) είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του X με $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty$. Τότε, από το λήμμα Borel-Cantelli σχεδόν όλα τα $x \in X$ ανήκουν σε πεπερασμένα το πολύ E_n. Επομένως υπάρχει $N \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ σχεδόν κάθε $x \in X$ δεν ανήκει στο E_n. Ισοδύναμα,

$$\text{για κάθε } n \geq N\text{: } |f_n(x)| \leq 1 \text{ σχεδόν για κάθε } x \in X\,.$$

Άρα,

$$-1 \leq \underline{\lim}\, f_n(x) \leq \overline{\lim}\, f_n(x) \leq 1 \text{ σχεδόν για κάθε } x \in X\,.$$

■

Θέμα 3. (α′) Έστω $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση και έστω $\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ με

$$\varphi(A) := \int_A g \, dm \,,$$

όπου $A \in \mathcal{M}$. Αποδείξτε ότι το φ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. (0,7 μον.)

(β′) Έστω $f \in L_1(E)$, όπου $E \in \mathcal{M}$.

(i) Αν (E_n) είναι μία φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του E, αποδείξτε ότι

$$\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \, dm \,.$$

(1 μον.)

(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$\text{για κάθε } n \geq N \text{ είναι } \left| \int_{E_n} f \, dm \right| < \varepsilon, \text{ όπου } E_n = \{x \in E : |f(x)| \geq n\} \,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α′) Παραπέμπουμε στις σημειώσεις του μαθήματος.

(β′) (i) Επειδή $f \in L_1(E)$, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στα μετρήσιμα υποσύνολα του E. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$\int_{E_n} f \, dm = \int_{E_n} f^+ \, dm - \int_{E_n} f^- \, dm \,.$$

με $\int_{E_n} f^+ \, dm < \infty$ και $\int_{E_n} f^- \, dm < \infty$. Αν

$$\varphi(A) := \int_A f^+ \, dm \,,$$

όπου A μετρήσιμο υποσύνολο του E, από το (α′) το φ είναι ένα θετικό μέτρο. Επειδή η (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του E με $\varphi(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από γνωστή ιδιότητα του θετικού μέτρου

$$\varphi(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) \Leftrightarrow \int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f^+ \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f^+ \, dm \,.$$

Παρόμοια έχουμε

$$\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f^- \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f^- \, dm \,.$$

Παρατηρούμε ότι τα όρια $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f^+ \, dm$ και $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f^- \, dm$ είναι πραγματικοί μη

αρνητικοί αριθμοί. Άρα,

$$\begin{aligned}\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f\,dm &= \int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f^+\,dm - \int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f^-\,dm \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f^+\,dm - \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f^-\,dm \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{E_n} f^+\,dm - \int_{E_n} f^-\,dm\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f\,dm\,.\end{aligned}$$

(ii) Αν $E_n := \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$, η (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του E με

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x \in E : |f(x)| = \infty\}\ .$$

Επειδή $f \in L_1(E)$, είναι $|f| < \infty$ σχεδόν παντού στο E και κατά συνέπεια

$$m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = m(\{x \in E : |f(x)| = \infty\}) = 0\,.$$

Επομένως, από το (i) έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f\,dm = \int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f\,dm = 0\,.$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$\text{για κάθε } n \geq N \text{ είναι } \left|\int_{E_n} f\,dm\right| < \varepsilon\,.$$

■

Θέμα 4. (α′) Διατυπώστε το λήμμα Fatou. Έστω η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με

$$f_n = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}\ .$$

Να βρεθεί η $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συγκλίνει η (f_n) ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$; Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\,dm$. Ποιο είναι το συμπέρασμα για την ακολουθία (f_n) στο λήμμα Fatou; Εφαρμόζεται το θεώρημα ομοιόμορφης σύγκλισης; (1,5 μον.)

(β′) Διατυπώστε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. Αν η συνάρτηση f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)\sin\left(\frac{x}{n}\right)\,dx = \int_0^1 x f(x)\,dx\,.$$

(1,5 μον.)

Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας.

Λύση.

(α′) *Λήμμα Fatou*: Αν (f_n) είναι ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$, τότε

$$\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \, \mathrm{d}m \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}m \,. \tag{1}$$

Αν $f_n = \dfrac{1}{n}\chi_{[-n,n]}$, τότε

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \,.$$

Δηλαδή $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-n,n]} \, dm = \frac{1}{n} m([-n,n]) = 2$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = 2 > 0 = \int_{\mathbb{R}} f \, dm = \int_{\mathbb{R}} (\lim_{n\to\infty} f_n) \, dm \,.$$

Επομένως έχουμε αυστηρή ανισότητα στην (1).

Δεν εφαρμόζεται το θεώρημα ομοιόμορφης σύγκλισης επειδή $m(\mathbb{R}) = \infty$.

(β′) Αν $f_n(x) := nf(x)\sin\left(\frac{x}{n}\right)$, η (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$. Είναι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nf(x)\sin\left(\frac{x}{n}\right) = xf(x) \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = xf(x) \text{ για κάθε } x \in [0,1] \,.$$

Επίσης,

$$|f_n(x)| = n|f(x)|\sin\left(\frac{x}{n}\right) \leq n|f(x)| \cdot \frac{x}{n} = x|f(x)| \leq |f(x)| \text{ για κάθε } x \in [0,1] \,.$$

Επειδή η $|f| \in L_1([0,1])$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)\sin\left(\frac{x}{n}\right) \, dx = \int_0^1 xf(x) \, dx \,.$$

■

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες