ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
2η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

ακαδ. έτος 2013–14

1. Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο $\mathbb{R}$ με

$$f_n = \begin{cases} \chi_{[0,\,\frac{1}{4}]} & \text{αν } n \text{ ρητός} \\ \chi_{[\frac{1}{4},\,1]} & \text{αν } n \text{ άρρητος}\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = \chi_{[0,1]}$, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \chi_{\{\frac{1}{4}\}}$ και

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n\, dm < \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm < \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm < \int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to\infty} f_n\, dm\,.$$

2. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, παραγωγίσιμη στο 0 και τέτοια ώστε $f(0) = 0$. Έστω

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η $g \in L_1(\mathbb{R})$.

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ αν $x \in [0,1]$, $f(x) = 0$ αν $x \in \mathbb{R}\setminus[0,1]$ και $\int_{[0,1]} f\, dm > 0$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με

$$f_n(x) := \frac{f(x+n)}{n}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n\, dm = 0\,.$$

Αν $g(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} g\, dm = \infty\,.$$

4. Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στο $[0,1]$ με

$$f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}\,.$$

(i) Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σημειακά στη μηδενική συνάρτηση στο $[0,1]$. Συγκλίνει η (f_n) ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση στο $[0,1]$;

(ii) Δείξτε ότι οι υποθέσεις του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης ικανοποιούνται και επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = 0\,.$$

(iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f_n(x)\, dx$ και να επαληθεύσετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0\,.$$

5. Έστω $f \in L_1(E)$, $E \in \mathcal{M}$ και έστω $a > 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{a\to\infty} a \cdot m(\{|f| > a\}) = 0\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν (a_n) είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, θεωρείστε την ακολουθία συναρτήσεων (g_n) με $g_n := |f|\chi_{\{|f|>a_n\}}$ και δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_E g_n\, dm = 0$.

6. Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στο $[0,1]$ με $f_n(x) = x^n - 2x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

   (i) Δείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{[0,1]} f_n\, dm \right) \neq \int_{[0,1]} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) dm\,.$$

   (ii) Δείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{[0,1]} |f_n|\, dm \right) = \infty\,.$$

7. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο $T > 0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(t) := g(t)e^{-t}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,\infty)$ και ότι

$$\int_0^{\infty} g(t)e^{-t}\, dt = \frac{1}{1-e^{-T}} \int_0^T g(t)e^{-t}\, dt\,.$$

<u>*Εφαρμογή*</u>. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-x}|\sin x|\, dx$.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $N \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι

$$\int_0^{NT} g(t)e^{-t}\, dt = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nT}^{(n+1)T} g(t)e^{-t}\, dt = \frac{1-e^{-NT}}{1-e^{-T}} \int_0^T g(x)e^{-x}\, dx\,.$$

Παράδοση των ασκήσεων έως 7/4/2014