ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

ακαδ. έτος 2013–14

1. Αν $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^m\right) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)\,.$$

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{Q}$. Τότε $x = \frac{p}{q}$ με $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \geq 2q$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $n!\pi x = 2k\pi$. Τότε $\cos(n!\pi x) = 1$ και επομένως
$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^m\right) = 1\,.$$
Αν $x \notin \mathbb{Q}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $n!\pi x \neq k\pi$ για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε $|\cos(n!\pi x)| < 1$ και επομένως
$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^m\right) = 0\,.$$
■

2. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολο του X. Αν $x_0 \in X$, ορίζουμε το $\delta_{x_0} : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ με
$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{αν το } x_0 \in E, \\ 0 & \text{αν το } x_0 \notin E\,. \end{cases}$$
Δηλαδή $\delta_{x_0}(E) = \chi_E(x_0)$. Δείξτε ότι το δ_{x_0}, γνωστό και σαν **μέτρο Dirac στο** x_0, είναι ένα μέτρο πιθανότητας. Ποια υποσύνολα του X έχουν μέτρο Dirac μηδέν;

Λύση. Είναι $\delta_{x_0}(\emptyset) = \chi_\emptyset(x_0) = 0$. Αν (E_n) είναι αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο υποσυνόλων του X, τότε
$$\begin{aligned}\delta_{x_0}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}(x_0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x_0) && (\text{τα } E_n \text{ είναι ξένα ανά δύο}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x_0}(E_n)\,.\end{aligned}$$
Επίσης $\delta_{x_0}(X) = \chi_X(x_0) = 1$. Επομένως το δ_{x_0} είναι ένα μέτρο πιθανότητας.

Αν E είναι υποσύνολο του X, τότε $\delta_{x_0}(E) = \chi_E(x_0) = 0$ αν και μόνο αν το $x_0 \notin E$. Επομένως ένα υποσύνολο E του X έχει μέτρο Dirac μηδέν, αν και μόνο αν το E δεν περιέχει το x_0. ■

3. Αν ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέτρο μηδέν, τότε το εσωτερικό του συνόλου είναι το κενό σύνολο. Ειδικά το μόνο ανοικτό σύνολο που έχει μέτρο μηδέν είναι το κενό σύνολο. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Δώστε παραδείγματα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που ενώ το εσωτερικό τους είναι το κενό σύνολο, τα σύνολα έχουν θετικό μέτρο.

Λύση. (i) Το εσωτερικό του γενικευμένου συνόλου Cantor C_a, $0 < a < 1$, είναι το κενό σύνολο. Όμως είναι γνωστό ότι $m(C_a) = 1 - a > 0$.

(ii) Έστω το σύνολο $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ του οποίου το εσωτερικό είναι το κενό σύνολο(ως γνωστόν το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$). Όμως
$$+\infty = m(\mathbb{R}) = m(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) + m(\mathbb{Q}) = m(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\,.$$
■

4. Έστω A το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο $[0,1]$ τέτοιο ώστε $x \in A$ αν και μόνο αν στο δεκαδικό ανάπτυγμα του $x = 0.a_1a_2a_3\cdots a_{2k+1}a_{2k+2}\cdots$ δεν είναι $a_{2k+1} = a_{2k+2} = 2$ για κανένα $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Δείξτε ότι το A είναι σύνολο Borel και υπολογίστε το μέτρο Lebesgue του A.

Λύση. Διαιρούμε το διάστημα $[0,1]$ σε εκατό ίσα μέρη και αφαιρούμε το διάστημα $(0.22, 0.23)$. Ας σημειωθεί ότι $0.22 = 0.2199\cdots$. Έστω A_1 η ένωση των υπόλοιπων 99 κλειστών διαστημάτων μήκους 100^{-1} το καθένα. Είναι $m(A_1) = 99/100$.

Στη συνέχεια διαιρούμε καθένα από τα υπόλοιπα 99 κλειστά διαστήματα σε εκατό ίσα μέρη και αφαιρούμε τα αντίστοιχα διαστήματα της μορφής $(0.a_1a_2 22,\ 0.a_1a_2 23)$. Έστω A_2 η ένωση των υπόλοιπων 99^2 κλειστών διαστημάτων μήκους 100^{-2} το καθένα. Είναι $m(A_2) = (99/100)^2$.

Στο n-οστό βήμα διαιρούμε καθένα από από τα 99^{n-1} κλειστά διαστήματα σε εκατό ίσα μέρη και αφαιρούμε τα αντίστοιχα διαστήματα της μορφής $(0.a_1a_2\cdots a_n 22,\ 0.a_1a_2\cdots a_n 23)$. Έστω A_n η ένωση των υπόλοιπων 99^n κλειστών διαστημάτων μήκους 100^{-n} το καθένα. Είναι

$$m(A_n) = \left(\frac{99}{100}\right)^n .$$

Το σύνολο

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n ,$$

όπου (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων Borel με $m(A_n) < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως το A είναι σύνολο Borel με

$$m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n = 0.$$

■

5. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και έστω $\alpha > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε ανοικτό διάστημα I

$$m(A \cap I) \geq \alpha \ell(I) .$$

Δείξτε ότι $m(A^c) = 0$.
Εφαρμογή. Έστω $A \subset (0,1)$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και έστω $\alpha > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $a, b \in [0,1]$ με $0 \leq a < b \leq 1$ είναι $m(A \cap (a,b)) \geq \alpha(b-a)$. Τότε $m(A) = 1$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε

$$\alpha\ell(I) \leq m(A \cap I) \leq m(I) = \ell(I)$$

και επομένως $0 < \alpha \leq 1$.

(i) *Έστω* $m(A^c) < \infty$. Η απόδειξη θα γίνει με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι $m(A^c) > 0$. Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων (I_n) τέτοια ώστε $A^c \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m(A^c) + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} m(A^c) .$$

Ισοδύναμα,

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m(A^c) .$$

Επειδή

$$m(A^c) = m\left(A^c \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^c \cap I_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A^c \cap I_n) ,$$

έχουμε ότι

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m(A^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A^c \cap I_n)\,.$$

Επειδή αυτές οι σειρές έχουν πεπερασμένα αθροίσματα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\varepsilon \ell(I_{n_0}) < m(A^c \cap I_{n_0})$$

Πράγματι, αν

$$\varepsilon \ell(I_n) \geq m(A^c \cap I_n)\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

τότε θα είχαμε

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A^c \cap I_n)$$

που είναι άτοπο.

Επομένως, επειδή από την υπόθεση $m(A \cap I_{n_0}) \geq \alpha \ell(I_{n_0})$, έχουμε ότι

$$\ell(I_{n_0}) = m(A \cap I_{n_0}) + m(A^c \cap I_{n_0}) > (\alpha + \varepsilon)\ell(I_{n_0})\,. \tag{1}$$

Επειδή $0 < \alpha \leq 1$, επιλέγουμε το $\varepsilon \in (0,1)$ έτσι ώστε $\alpha + \varepsilon > 1$ και επομένως η (1) δεν μπορεί να ισχύει. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι $m(A^c) > 0$. Άρα $m(A^c) = 0$.

(ii) *Γενική περίπτωση*. Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $m(A^c \cap (-n,n)) = m((A \cup (-n,n)^c)^c) < \infty$. Επειδή

$$m\left((A \cup (-n,n)^c) \cap I\right) \geq m(A \cap I) \geq \alpha \ell(I), \text{ για κάθε ανοικτό διάστημα } I \text{ του } \mathbb{R}\,,$$

από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε $m(A^c \cap (-n,n)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$m(A^c) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^c \cap (-n,n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A^c \cap (-n,n)) = 0$$

και άρα $m(A^c) = 0$. ■

6. Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $m^*(E) < +\infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο, αν και μόνο αν υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια (K_n) ξένων ανά δύο συμπαγών συνόλων και σύνολο Z μέτρου μηδέν με

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup Z\,. \tag{2}$$

Λύση. Έστω ότι ισχύει η (2). Επειδή τα συμπαγή σύνολα K_n καθώς επίσης και το Z είναι Lebesgue μετρήσιμα σύνολα, το σύνολο E είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Αντίστροφα, έστω $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο με $m(E) < +\infty$. Ως γνωστόν

$$m(E) = \sup\left\{m(K) : K \subseteq E \text{ και το } K \text{ είναι συμπαγές}\right\}\,.$$

Επομένως για $\varepsilon = 1$ υπάρχει συμπαγές σύνολο $K_1 \subseteq E$ με $m(E) < m(K_1) + 1$ και ισοδύναμα $m(E \setminus K_1) < 1$. Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί ξένα ανά δύο συμπαγή σύνολα K_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ με $K_i \subseteq E$ και

$$m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i\right) < \frac{1}{n-1}\,, \quad \text{για } n \geq 2\,.$$

Τότε υπάρχει συμπαγές σύνολο $K_n \subseteq E \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i$ τέτοιο ώστε

$$m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) = m\left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i\right) \setminus K_n\right) < \frac{1}{n}\,.$$

Επαγωγικά ορίζουμε μ' αυτό τον τρόπο μια αριθμήσιμη οικογένεια (K_n) ξένων ανά δύο υποσυνόλων του E με

$$m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) < \frac{1}{n}\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν ορίσουμε $Z := E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, τότε $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \cup Z$ με

$$m(Z) = m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) \leq m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) < \frac{1}{n}\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $m(Z) = 0$. ■

7. (**Συνάρτηση κατανομής**) Ένα θετικό μέτρο μ στη Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ λέγεται **μέτρο Borel**. Υποθέτουμε ότι το μέτρο μ είναι πεπερασμένο, δηλαδή $\mu(\mathbb{R}) < \infty$. Η **συνάρτηση κατανομής** του μέτρου μ, συμβολίζεται με F, ορίζεται στο $\mathbb{R}$ με

$$F(x) = \mu((-\infty, x])\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Δείξτε ότι

(α′) Η F είναι αύξουσα.

(β′) Η F είναι από δεξιά συνεχής, δηλαδή $F(x+) = \lim_{t \to x^+} F(t) = F(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ′) Η F είναι φραγμένη.

(δ′) Είναι $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \mu(\mathbb{R})$.

Λύση.

(α′) Αν $x \leq y$, τότε $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$ και επομένως

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F(y)\,.$$

Άρα η F είναι αύξουσα συνάρτηση.

(β′) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η F είναι αύξουσα, το όριο $\lim_{t \to x^+} F(t) = F(x+)$ υπάρχει. Είναι

$$(-\infty, x+1] \supset \left(-\infty, x + \frac{1}{2}\right] \supset \cdots \text{ και } \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty,\, x + \frac{1}{n}\right] = (-\infty, x]\,.$$

Επομένως, επειδή το μέτρο μ είναι πεπερασμένο, από γνωστή ιδιότητα του μέτρου

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n \to \infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right) = F(x+)\,.$$

Άρα $F(x+) = F(x)$, δηλαδή η F είναι από δεξιά συνεχής στο x και αυτό ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ′) Επειδή το μέτρο μ είναι πεπερασμένο, έχουμε $F(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η F είναι φραγμένη.

(δ′) Επειδή η συνάρτηση F είναι μονότονη, τα όρια $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ υπάρχουν. Επίσης έχουμε

$$(-\infty,-1] \supset (-\infty,-2] \supset \cdots \text{ και } \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty,-n] = \emptyset\,.$$

Επομένως, επειδή το μέτρο μ είναι πεπερασμένο, από γνωστή ιδιότητα του μέτρου

$$0 = \mu(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty,-n]) = \lim_{n\to\infty} F(-n) = \lim_{x\to-\infty} F(x)\,.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή το όριο $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ υπάρχει.
Παρόμοια έχουμε

$$(-\infty,1] \subset (-\infty,2] \subset \cdots \text{ και } \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,n] = \mathbb{R}\,.$$

Επομένως, από γνωστή ιδιότητα του μέτρου

$$0 = \mu(\mathbb{R}) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty,n]) = \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{x\to+\infty} F(x)\,.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή το όριο $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ υπάρχει.

■

Παράδοση των ασκήσεων έως 9/4/2014