ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Εξέταση στη Συναρτησιακή Ανάλυση

24-3-2014

Θέμα 1. (α) Έστω X διανυσματικός χώρος και $f, g : X \to \mathbb{R}$ γραμμικά.

(i) Δείξτε ότι αν $f \neq 0$ τότε $\ker f$ είναι υπόχωρος του X συνδιάστασης 1.

(ii) Αν $\ker f = \ker g$ δείξτε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ ώστε $g = \lambda f$.

(β) Έστω X διανυσματικός χώρος και $f, f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ γραμμικά ώστε $\ker f_1 \cap \ker f_2 \subset \ker f$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

(γ) Έστω X χώρος με νόρμα, Y γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X και $x_0 \in X \setminus Y$. Δείξτε ότι υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$, $Y \subset \ker f$ και $f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$.

Θέμα 2. (α) Έστω $a, b \in [0,1]$ με $a < b$. Ορίζουμε $\phi : (C[0,1], \|\cdot\|_{sup}) \to \mathbb{R}$ με $\phi(f) = \int_a^b f(t)dt$ για κάθε $f \in C[0,1]$. Δείξτε ότι η ϕ είναι γραμμική, φραγμένη και $\|\phi\| = b - a$.

(β) Ορίζουμε $T : (C[0,1], \|\cdot\|_{sup}) \to (C[0,1], \|\cdot\|_{sup})$ ώστε αν $f \in C[0,1]$ και $Tf = g$, τότε $g(t) = f(t^2)$ για κάθε $t \in [0,1]$.

(i) Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός.

(ii) Δείξτε ότι ο T είναι ισομετρία.

(ii) Δείξτε ότι ο T είναι επί.

(γ) Ορίζουμε $T : (\ell_\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty) \to (\ell_2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ με $T(a_n)_n = \left(\frac{a_n}{2^{n/2}}\right)_n$.

(i) Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός, φραγμένος και 1-1.

(ii) Δείξτε ότι $T[\ell_\infty(\mathbb{N})]$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\ell_2(\mathbb{N})$.

Θέμα 3. (α) Έστω $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $(x_n)_n$ αριθμήσιμη Hamel βάση του X.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει $(e_n)_n$ ορθοκανονική Hamel βάση του X.

(ii) Δείξτε ότι ο X είναι ισομετρικός με τον $(c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$.

(β) Έστω X χώρος Hilbert.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in X$ το $f_x : X \to \mathbb{R}$, με $f_x(y) = \langle x, y\rangle$ για κάθε $y \in X$, είναι γραμμικό φραγμένο και $\|f_x\| = \|x\|$.

(ii) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in X$, δείξτε ότι $\lambda f_x = f_{\lambda x}$.

(iii) Αν $f \in X^*$ με $f \neq 0$ και $x \in X$ με $x \perp \ker f$, τότε δείξτε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $f = \lambda f_x = f_{\lambda x}$. $x \neq 0_x$

Θέμα 4. Έστω X χώρος με νόρμα.

(α) Έστω K κυρτό υποσύνολο του X με $0 \in K^\circ$.

(i) Δώστε τον ορισμό του του συναρτησιακού Minkowski του K και δείξτε ότι $\rho_K(x) < \infty$ για κάθε $x \in X$.

(ii) Δείξτε ότι $\rho_K(x+y) \leqslant \rho_K(x) + \rho_K(y)$ για κάθε $x, y \in X$.

(iii) Αν L κυρτό υποσύνολο του X με $K \subset L$, δείξτε ότι $\rho_L(x) \leqslant \rho_K(x)$ για κάθε $x \in X$.

(β)

(i) Έστω K κυρτό υποσύνολο του X με $0 \in K^\circ$ και $x_0 \in X \setminus K^\circ$. Δείξτε ότι υπάρχει $f \in X^*, f \neq 0$ με $\sup\{f(x) : x \in K\} \leqslant f(x_0)$.

(ii) Έστω A, B κυρτά υποσύνολα του X.

1) Δείξτε ότι $\operatorname{dist}(A, B) = \operatorname{dist}(0, A - B)$.

2) Αν $\operatorname{dist}(A, B) > 0$ δείξτε ότι υπάρχει $f \in X^*$ που διαχωρίζει γνήσια τα A, B.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!