ΕΞΕΤΑΣΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

27 Ιουνίου 2013

Θέμα 1.

(α) Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Δείξτε ότι το A έχει ελάχιστο στοιχείο.

(β) Έστω A άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

i) Δώστε τον ορισμό του supremum του A.

ii) Αν $x_0 \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $x_0 = \sup A$ αν και μόνο αν το x_0 είναι άνω φράγμα του A και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $x_0 - \varepsilon < x \leqslant x_0$.

iii) Δείξτε ότι το $\mathbb{N}$ ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

Θέμα 2.

(α) Δίνονται τα παρακάτω υποσύνολα του $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$

i) $A_1 = \{(x, y) : |x \cdot y| < 1\}$

ii) $A_2 = \{(\frac{1}{n}, y) : n \in \mathbb{N} \text{ και } 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{n}\}$

Δείξτε ότι το A_1 είναι ανοικτό και ότι $\overline{A_2} = A_2 \cup \{0\}$.

(β) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.

i) Δώστε τον ορισμό του ανοικτού υποσυνόλου του (X, ρ).

ii) Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $S(x_0, \varepsilon)$ είναι ανοικτό.

iii) Έστω $U_1, U_2, \ldots, U_n$ πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά υποσύνολα του (X, ρ). Δείξτε ότι το σύνολο $U = \cap_{i=1}^{n} U_i$ είναι ανοικτό.

Θέμα 3. Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος.

(α) i) Δείξτε ότι αν $\varepsilon > 0$ και A είναι ε-διαχωρισμένο υποσύνολο του X, τότε το A είναι πεπερασμένο (δώστε τον ορισμό του ε-διαχωρισμένου συνόλου).

ii) Αν για $n \in \mathbb{N}$ A_n είναι μεγιστικό $\frac{1}{n}$-διαχωρισμένο υποσύνολο του X, τότε το $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

iii) Δείξτε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος.

(β) i) Αν F, G είναι κλειστά υποσύνολα του X με $F \cap G = \varnothing$, δείξτε ότι υπάρχουν $x_0 \in F$ και $y_0 \in G$ ώστε $\rho(x_0, y_0) = \rho(F, G) = \inf\{\rho(x, y) : x \in F, y \in G\}$.

ii) Αν κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στο X είναι τελικά σταθερή, δείξτε ότι το σύνολο X είναι πεπερασμένο.

Θέμα 4.

(α) Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $(f_i)_{i \in I} : X \to \mathbb{R}$ οικογένεια συνεχών συναρτήσεων, ώστε για κάθε $x \in X$ το $\{f_i(x)\}_{i \in I}$ να είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

i) Δείξτε ότι για κάθε $\lambda > 0$ το σύνολο

$$F_\lambda = \{x \in X : |f_i(x)| \leqslant \lambda \text{ για κάθε } i \in I\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του X.

ii) Χρησιμοποιήσετε κατάλληλη μορφή του Θεωρήματος Baire για να δείξετε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε το $\operatorname{int} F_n \neq \varnothing$.

(β) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ συστολή. Αν $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ n-φορές, δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $\cap_{n=1}^{\infty} f^n[X] = \{x_0\}$ και $f(x_0) = x_0$.

Θέμα 5.

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1. Είναι γνωστό ότι η $f^{-1} : f[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

i) Δείξτε ότι η μετρική $\rho_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική $\rho_{|\cdot|}$.

ii) Αν $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, δείξτε ότι η f είναι 1-1 και ότι ο $(\mathbb{R}, \rho_f)$ δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(β) i) Δώστε τον ορισμό της ισοσυνεχούς οικογένειας συναρτήσεων $\{f_i\}_{i \in I} : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

ii) Δείξτε ότι αν $\{f_i\}_{i=1}^n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι πεπερασμένη οικογένεια συνεχών συναρτήσεων, τότε η $\{f_i\}_{i=1}^n$ είναι ισοσυνεχής.

iii) Έστω $f, \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, ώστε η $\{f_n\}_n$ να συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δείξτε ότι η $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ισοσυνεχής.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!